This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
28 April, 1878.

Taschenbuch der Mathematik.

Tabellen und Formeln

zum Gebrauche für den Unterricht an höheren Lehranstalten

und

zur Anwendung bei den in der Praxis vorkommenden Berechnungen.

Bearbeitet

von

Johann Otto Wilhelm

Dr. W. Ligowski,

Professor an der Kaiserlichen Marineschule und Lehrer der Marine-Akademie in Kiel. Früher Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule in Berlin.

Mit Holzschnitten.

Zweite vermehrte Auflage.

Berlin,

Verlag von Ernst & Korn.

(Gropius'sche Buch- und Kunsthandlung.)

1873.

Math 378.73

1878, April 23.
Farrar fund.

Druck von Breitkopf u. Härtel in Leipzig.

Vorwort.

Die nachstehende Sammlung von Tabellen und Formeln der Mathematik verdankt ihre Entstehung dem Wunsche meiner Zuhörer. Ich hoffe, dass durch die Mannigfaltigkeit der Tabellen und die Art der Zusammenstellung der Formeln das Buch auch für weitere Kreise brauchbar sein wird.

Berlin, im August 1867.

Ligowski.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei dieser neuen Auflage war ich bemüht, durch Aufnahme der Logarithmen der hyperbolischen Functionen, und einer Tabelle der rechtwinkligen Dreiecke das Buch für die Anwendungen der Mathematik brauchbarer zu machen. Auch der Text hat mehrfache Erweiterungen erfahren. Besonders war ich bestrebt dem Buche mehr die Form eines Leitfadens als einer reinen Formelsammlung zu geben. Ich hoffe, dass das Werkchen in seiner neuen Gestalt wiederum eine freundliche Aufnahme finden wird.

Kiel, den 9. Januar 1873.

Ligowski.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Bemerkungen über den Gebrauch der Tabellen IX

Tabellen.

Briggische Logarithmen 2
Natürliche Logarithmen 4
Gaussische Logarithmen 6
log sinus und log cosinus 8
log tangens und log cotangens 10
sinus und cosinus 12
tangens und cotangens 14
secans und cosecans 16
Arcus 18
$\log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$ 20
Die Logarithmen der hyperbolischen Functionen 22
Sin ψ und Cos ψ 28
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$ und $\log \Gamma_{(a)}$ 29
Zahlenwerthe und Logarithmen häufig vorkommender Ausdrücke 30
Rationale Dreiecke 31
Rechtwinklige Dreiecke 32
$d\pi$, $\frac{1}{4} d^2\pi$, d^2, d^3, $\sqrt{d}$ und $\sqrt[3]{d}$ für d von 1 bis 1000 34
Zur Bestimmung der elliptischen Integrale $F\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ und $F(\varepsilon, \varphi)$, $E(\varepsilon, \varphi)$ 54
Tabelle zur Verwandlung der wahren Zeit in mittlere 57
Proportionaltheile. (Ohne Komma, Multiplikationstabelle.) 58
Ortstafel. (Sternwarten.) 60

Arithmetik.

Erklärungen und Grundgesetze 61
Die einfachen Zahlenverbindungen 61
Umformung der Grundgleichungen 63
Gesetze für das Rechnen mit allgemeinen und mit numerischen Zahlen 63
Addition und Subtraktion,
Multiplikation und Division
Positive und negative Zahlen
Ungleichungen
Die gebrochenen Zahlen und Grenzwerthe.
Potenzen 66
Potenzen mit positiven Exponenten
Potenzen mit negativen Exponenten
Potenzen von Summen und Differenzen
Eine Zahl als Summe von Potenzen einer andern Zahl.

Seite

Die Eigenschaften der ganzen Zahlen 68
Erklärungen
Gesetze
Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.
Dezimalbrüche 69
Kettenbrüche 71
Wurzeln 72
Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten
Wurzeln mit gebrochenen Exponenten
Irrationale Zahlen und Wurzelausziehung
Die complexen Zahlen.
Die Logarithmen 75
Die Factorielle, Binomialcoeffizienten 77
Die Combinationslehre 77
Die Determinanten 79
Endliche Reihen 82
Die arithmetischen Reihen 84
Die Interpolation 86
Die geometrischen Progressionen 88
Unendliche Reihen 88
Entwickelung der Functionen in Reihen 89
Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten 89
Die Expouentialreihen, Logarithmen 89
Die hyperbolischen Functionen 90
Die Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mit mehreren Unbekannten 91
Die Proportionen 93
Die Theilungsrechnung 94
Das allgemeine arithmetische Mittel 94
Gleichungen des zweiten Grades 95
Gleichungen des dritten Grades 95
Gleichungen des vierten Grades 97
Höhere Gleichungen mit einer Unbekannten 97
Die reciproken Gleichungen 100
Die reinen Gleichungen $n$ten Grades 100
Die Vergleichung der Grössen mittelst der Zahl und die bürgerlichen Rechnungsarten 101
Allgemeine Gesetze
Die einfache und zusammengesetzte regula de tri
Kettenregel
Gesellschaftsrechnung
Mischungsrechnung
Einfache Zinsrechnung
Zinseszins- und Rentenrechnung
Mittlerer Zahlungstermin.

Goniometrie.

Functionen in den vier Quadranten und Grundgesetze 103
Zahlenwerthe einiger Functionen 104
Eine Function ausgedrückt durch die anderen 105
Formeln, in welchen zwei Winkel vorkommen 105
Formeln, in welchen ein Winkel, oder ein Winkel und der Winkel von 45° vorkommt 106
Potenzen von sinus und cosinus 107
Formeln zwischen drei Winkeln, deren Summe 180° beträgt 107
Reihen und Produkte 107
Formeln zur Berechnung der Functionen kleiner Winkel 108
Gleichungen zwischen den Arcus der verschiedenen Functionen 108

Allgemeine Gesetze der ebenen Trigonometrie.

Das rechtwinklige Dreieck 109
Das gleichschenklige Dreieck 109
Das schiefwinklige Dreieck 110

Formeln zur Berechnung der Stücke ebener Figuren.

Seite
Das rechtwinklige Dreieck 110
Das gleichschenklige Dreieck 111
Das schiefwinklige Dreieck 112
Das Parallelogramm 113
Das Trapez 114
Das Viereck im Kreise 114
Das Trapezoid 115
Die regulären Vielecke im Allgemeinen 115
Das Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Achteck, Zehneck, Zwölfeck . 116

Die sphärische Trigonometrie.

Das rechtwinklige Dreieck 117
Das schiefwinklige Dreieck 118
Berechnungen 120

Stereometrie.

Würfel, Prisma, Cylinder 121
Körper mit veränderlichen Durchschnittsflächen Pyramide, Kegel, Kegelhufe, Prismoide, Kugel 122
Umdrehungskörper (Guldins Regel) 125
Körper, welche durch Drehung einer ebenen Figur entstehen, wenn eine Begrenzungslinie ein Kreisbogen ist 126
Formeln zur Berechnung des Inhalts der Gewölbe 126
Näherungsweise Berechnung der Inhalte von Fässern und andern Körpern 128
Berechnung des Gewichts eines Körpers aus seinem Volumen . . . 128

Die Coordinaten in der Ebene.

Definitionen und allgemeine Gesetze 129
Verwandelung der Coordinaten 130
Graphische Darstellung von Gleichungen 130
Die gerade Linie, bei rechtwinkligen Coordinaten 131

Die Kegelschnitte.

Allgemeine Gesetze 133
Der Kreis 134
Die Parabel 137
Die Ellipse 139
Die Hyperbel 141
Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte 143
Zurückführung der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte auf die Scheitelgleichung 144

Die Coordinaten im Raume.

Allgemeine Gesetze 144
Verwandlung der Coordinaten 146
Polarcoordinaten 146
Darstellung der Flächen durch Gleichungen 146
Die Gleichung der Ebene 147
Die gerade Linie im Raume 148
Die gerade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen 149
Axonometrische Projectionen 150
Bestimmung der perspectivischen Projection eines Punktes durch Rechnung und Construction 151
Die Flächen zweiten Grades 151

Differenzialrechnung.

Erklärungen und Bezeichnungen 152
Grundformeln 155
Allgemeine Formeln 157
Beziehungen zwischen einer Function und ihren Ableitungen 158
Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe 159

Seite

Werthe solcher Ausdrücke, welche die Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 annehmen 160
Maxima und Minima der Functionen 161
Zerlegung rationaler Brüche in Partialbrüche 161

Integralrechnung.

Grundformeln 162
Allgemeine Gesetze 164
Formeln, durch Verallgemeinerung der Grundformeln erhalten . . . 166
Reductionsformeln für $\int u^n \, dx$, wenn $u = a + bx^2$ 167
Specielle Fälle von $\int u^n \, dx$, wenn $n = 1/2, 3/2$ etc. 167
Reductionsformeln für $\int u^p x^q \, dx$, wenn $u = a + bx^n$ 167
Reductionsformeln für $\int \sin x^p \cos x^q \, dx$ 168
Specielle Fälle des Vorstehenden 168
Reductionsformeln für $\int x^p \cos x \, dx$, $\int x^p \sin x \, dx$, etc. . . . 169
Reductionsformeln für $\int \Theta \sin x^p \, dx$ etc. 169

Bestimmte Integrale.

Definition und allgemeine Gesetze 170
Specielle bestimmte Integrale 172
Die Euler'schen Integrale und die Gammafunctionen 173
Näherungweise Berechnung bestimmter Integrale 174
Convergenz der Reihen und Summirung derselben 175
Die mehrfachen bestimmten Integrale 175
Die Fourier'schen Reihen und Integrale 176

Differenzialgleichungen.

Von der Form $P dx + Q dy = 0$ 177
Von der Form $P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \ldots P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$ . . 178

Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf Geometrie.

Ebene Curven 181
Curven doppelter Krümmung 185
Krumme Flächen 186
Kegelschnitte (Parabel, Ellipse, Bemerkung über elliptische Integrale, Hyperbel) 188
Curven höherer Ordnung 192
Transcendente Curven 192

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wahrscheinlichkeit aus Gründen 194
Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen 195
Methode der kleinsten Quadrate 195

Maasse und Gewichte 201
Münzen 210

Bemerkungen für den Gebrauch der Tabellen.

1. Briggische Logarithmen.

Um die Mantisse des Logarithmus einer dreistelligen Zahl, z. B. von 457 aufzusuchen, gehe man in der Zeile 45 bis zur Colonne 7, man findet daselbst 0,6599 als Mantisse von log 457. Da die Kennziffer von log 457 gleich 2 ist, so hat man:

$$\log 457 = 2{,}6599$$

Nach den Gesetzen auf Seite 76 ergiebt sich:

$$\log 4570 = 3{,}6599$$
$$\log 45700 = 4{,}6599$$
$$\log 45{,}7 = 1{,}6599$$
$$\log 4{,}57 = 0{,}6599$$
$$\log 0{,}457 = 0{,}6599 - 1$$
$$\log 0{,}0457 = 0{,}6599 - 2 \text{ etc.}$$

Die Zahl 457 ist zugleich die Anzahl der Minuten des Winkels

$$7^\circ\ 30' + 7'$$

Ist a eine ganze Zahl über 100 und unter 1000 und

$$\log(a+1) - \log a = d \text{ (Tafeldifferenz)},$$

dann ist, wenn x kleiner als 10, der Logarithmus der vierstelligen Zahl $10a + x$ gegeben durch

$$\log(10a + x) = \log 10a + x \cdot \frac{d}{10}.$$

z. B. $\log 2537 = 3{,}4031 + 7 \cdot 0{,}00017$
$= 3{,}4031 + 0{,}00119 = 3{,}4043$

Die Tabelle der Proportionaltheile Seite 58 und 59 giebt unter der Differenz 17 in der Colonne 7 sofort die Zahl 11,9 oder abgekürzt 12 Einheiten der letzten Decimalen als Product von $x \cdot \frac{d}{10}$

Soll zu einem gegebenen Logarithmus die Zahl auf vier Stellen gefunden werden, so suche man die nächst kleinere Zahl a der Tabelle. Bezeichnet man die vierte noch fehlende Stelle durch x, so ist, wenn y die unbekannte Zahl: $y = 10a + x$ und

$$x = \frac{(\log y - \log 10a) \cdot 10}{d}$$

z. B. $\log y = 3{,}2159$ Man findet $a = 164$ und $d = 0{,}0027$
$\log 10a = 3{,}2148$
$0{,}0011$ also $x = \frac{11}{27} = 4$, mithin
$y = 10a + x = 1644$

Die Tabelle der Proportionaltheile giebt bei $d = 27$ die Colonnenzahl 4 als diejenige, welche der Differenz 11 entspricht.

Wäre $\log y = 4{,}2159$, dann ist

$$\log \frac{y}{10} = 3{,}2159 \text{ und}$$

$$\frac{y}{10} = 1644, \text{ also } y = 16440$$

Wenn $\log y = 0{,}2159 - 1$, so ist

$$\log 10^4 y = 3{,}2159 \text{ und}$$

$$10^4 y = 1644, \text{ also } y = 0{,}1644$$

2. Natürliche Logarithmen.

Soll von einer Zahl z der natürliche Logarithmus bestimmt werden, so multiplicire oder dividire man dieselbe mit einer solchen Potenz von 10, dass man eine Zahl zwischen 100 und 1000 erhält und verfahre dann wie bei den Briggischen Logarithmen.

(Die natürlichen Logarithmen der Potenzen von 10 stehen auf Seite 30.)

Z. B.: Es sei $z = 27{,}38$, dann ist $10z = 273{,}8$

$$\begin{aligned} \log n\, 10z &= \log n\, 273{,}8 \\ &= 5{,}6095 \\ &\quad\; 29 \\ \hline \log n\, 10z &= 5{,}6124 \\ \log n\, 10 &= 2{,}3026 \text{ und durch Subtraction} \\ \hline \log n\, z &= 3{,}3098 \end{aligned}$$

Es sei $z = 2895$, dann ist $\frac{z}{10} = 289{,}5$ und

$$\begin{aligned} \log n \frac{z}{10} &= \log n\, 289{,}5 \\ &= 5{,}6664 \\ &\quad\; 17 \\ \hline \log n \frac{z}{10} &= 5{,}6681 \\ \log n\, 10 &= 2{,}3026 \text{ und durch Addition} \\ \hline \log n\, z &= 7{,}9707 \end{aligned}$$

Wenn zu einem natürlichen Logarithmus die Zahl gefunden werden soll, so addire oder subtrahire man den natürlichen Logarithmus einer solchen Potenz von 10, dass die zu dieser Summe oder Differenz gehörige Zahl zwischen 100 und 1000 liegt.

Z. B.

$$\begin{aligned} \log n\, z &= 1{,}0629 \\ \log n\, 10^2 &= 4{,}6052 \\ \hline \log n\, 10^2 z &= 5{,}6681 \\ 10^2 z &= 289{,}5 \text{ mithin} \\ z &= 2{,}895 \end{aligned}$$

3. Gauss'sche Logarithmen.

Addition.

Mit Hülfe dieser Tabelle kann man aus $\log a$ und $\log b$ ohne a und b zu bestimmen den $\log(a+b)$ finden.

Wenn die Zahlen unter A gleich $\log x$ sind, so sind die entsprechenden Zahlen unter B, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Es ist $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a\left(1+\frac{1}{a:b}\right)$

Setzt man $\frac{a}{b}=x$, $a>b$, dann ist

$$A=\log x=\log a-\log b \text{ und } B=\log\left(1+\frac{b}{a}\right), \text{ also}$$

$$\log(a+b)=\log a+B.$$

Bei der Bestimmung von B aus A verfahre man wie beim Aufschlagen der Briggischen Logarithmen, beachte aber, dass die Tafeldifferenzen negativ sind. Bei der Interpolation benütze man die Tabelle der Proportionaltheile.

Z. A.: $\log a = 2{,}3456$

$\log b = 1{,}4135$

$A=\log a-\log b = 0{,}9321$ Hieraus

$B = 0{,}0480$

$\log a = 2{,}3456$

$\log(a+b) = 2{,}3936$ und

$a+b = 247{,}5$

Subtraction.

Aus $\log a$ und $\log b$ wird ohne Bestimmung von a und b

$\log(a-b)$ gefunden

Wenn die Zahlen unter A, $\log x$ und die Zahlen unter B, $\log y$ sind, dann ist $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

Ist $\frac{a}{b}=x$, dann ist $\frac{a}{a-b}=y$, also

$$B=\log y=\log a-\log(a-b), \text{ mithin}$$

$$\log(a-b)=\log a-B$$

Wäre $\frac{a}{a-b}=x$ und $y=\frac{a}{b}$, so hätte man

$$A=\log x=\log a-\log(a-b) \text{ und}$$

$$\log(a-b)=\log a-A$$

Die erste Formel für $\log(a-b)$ wendet man an, wenn $\log\frac{a}{b}>0{,}3$ die zweite, wenn $\log\frac{a}{b}<0{,}3$ ist.

Um aus A das entsprechende B zu bestimmen, verfährt man wie beim Aufschlagen des Logarithmus zu einer gegebenen Zahl, während die Bestimmung von A aus dem entsprechenden B dem Aufsuchen der Zahl aus einem gegebenen Logarithmus analog ist.

Z. B. 1.
$$\log a = 2{,}4567$$
$$\log b = 0{,}9436$$
$$\log \frac{a}{b} = 1{,}5131 = A$$
$$+ B = 0{,}0135$$
$$\log a = 2{,}4567$$
$$B = 0{,}0135 \text{ durch Subtraction}$$
$$\log (a - b) = 2{,}4431$$

2.
$$\log a = 2{,}4567$$
$$\log b = 2{,}2234$$
$$\log \frac{a}{b} = 0{,}2333 = B$$
$$A = 0{,}3813$$
$$\log a = 2{,}4567$$
$$A = 0{,}3813 \text{ durch Subtraction}$$
$$\log (a - b) = 2{,}0754$$

4. Die Logarithmen der sinus, cosinus etc.

Bezeichnet α die Grade und Zehner der Minuten eines Winkels und β die Einer der Minuten desselben, dann ist, wenn d der Unterschied der Zahlen der Tabelle ist, welche den Winkeln α und $\alpha + 10'$ entsprechen:

$$\log \sin(\alpha + \beta) = \log \sin \alpha + \beta \cdot \frac{d}{10}$$
$$\log \cos(\alpha + \beta) = \log \cos \alpha - \beta \cdot \frac{d}{10}$$
$$\log \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \log \operatorname{tg} \alpha + \beta \cdot \frac{d}{10}$$
$$\log \operatorname{cotg} (\alpha + \beta) = \log \operatorname{cotg} \alpha - \beta \cdot \frac{d}{10}$$

Das Vorzeichen von d ist in den vorstehenden Formeln schon berücksichtigt.

Die Producte $\beta \cdot \frac{d}{10}$ ergeben sich mit Hülfe der Tabelle der Proportionaltheile.

Soll aus dem Logarithmus einer Function der Winkel x gefunden werden, so ist, wenn α der nächstkleinere Winkel in Graden und Zehnern der Minuten ist und durch β die Einer der Minuten bezeichnet werden: $x = \alpha + \beta$ und für die verschiedenen Functionen

$$\beta = \frac{(\log \sin x - \log \sin \alpha)\, 10}{d}$$

$$\beta = \frac{(\log \cos \alpha - \log \cos x)\, 10}{d}$$

$$\beta = \frac{(\log \operatorname{tg} x - \log \operatorname{tg} \alpha)\, 10}{d}$$

$$\beta = \frac{(\log \operatorname{cotg} \alpha - \log \operatorname{cotg} x)\, 10}{d}$$

Zur Ermittelung von β benutze man wiederum die Tabelle der Proportionaltheile.

Zur Bestimmung von $\log \sin \alpha$, $\log \operatorname{tg} \alpha$, $\log \operatorname{cotg} \alpha = -\log \operatorname{tg} \alpha$ kleiner Winkel benutze man die unter den Tabellen stehenden Formeln.

5. sinus, cosinus, tangens etc.

Lässt man in den Formeln in No. 4 das Zeichen log fort, so hat man die Interpolationsformeln für sinus, cosinus, tangens etc.

6. Tabelle zur Ermittelung der hyperbolischen Functionen.

Gehören zu den Winkeln φ_1 und $\varphi_1 + 10'$ die Zahlen x_1 und x_2 dann soll die Differenz $x_2 - x_1$ durch d bezeichnet werden. Ist φ ein Winkel zwischen φ_1 und $\varphi_1 + 10'$ und x die entsprechende Zahl der Tabelle, so hat man angenähert

$$x = x_1 + (\varphi - \varphi_1)\, \frac{d}{10} \text{ und}$$

$$\varphi = \varphi_1 + (x - x_1)\, \frac{10}{d}$$

Wenn φ über 75° ist, so benutze man zur Bestimmung von x aus φ und umgekehrt von φ aus x die unter der Tabelle stehenden Formeln.

Für Winkel von Null bis 24° ist

$$\log x = \log \varphi' + \tfrac{1}{2}\, d E \log \cos \varphi' - 3{,}5363$$

Um φ aus x zu bestimmen, setze man

$\log \alpha' = \log x + 3{,}5363$, dann ist angenähert

$\log \varphi' = \log \alpha' - \tfrac{1}{2}\, d E \log \cos \alpha'$, noch genauer φ'_1 aus

$\log \varphi'_1 = \log \alpha' - \tfrac{1}{2}\, d E \log \cos \varphi'$

Zahlenbeispiele.

1. Aus $\varphi = 49° 36{,}3'$ soll x gefunden werden.

Es ist $\varphi_1 = 49° 30'$ und $d = 0{,}0045$, daher

$$x = 0{,}9972 + 6{,}3 \cdot 0{,}00045$$
$$= 0{,}9972 + 0{,}0028$$
$$= 1{,}0000$$

Sin 1 = tg 49° 36,3′ = 1,1752, Cos 1 = sec 49° 36,3′ = 1,5431.

2. Aus $x = 0{,}9200$ soll φ gefunden werden.

$x_1 = 0{,}9189$ und $d = 0{,}0012$

$$\varphi = 46^\circ\ 30' + \frac{0{,}0011 \cdot 10}{0{,}0012}$$

$$= 46^\circ\ 32{,}6'$$

$\mathfrak{Sin}\ 0{,}92 = \operatorname{tg} 46^\circ\ 32{,}6' = 1{,}0554$, $\mathfrak{Cof}\ 0{,}92 = 1{,}4539$

3. $\varphi = 89^\circ\ 11{,}3'$ gesucht x;
$\psi = 0^\circ\ 48{,}7'$
$k = 8{,}8357$
$\log n\ \psi = 3{,}8857$

$x = 4{,}9500$

$\mathfrak{Sin}\ 4{,}95 = 70{,}58$, $\mathfrak{Cof}\ 4{,}95 = 70{,}59$

4. $x = 3{,}45$ gesucht φ;
φ liegt zwischen $86^\circ\ 20'$ und $86^\circ\ 30'$, also
$220 > \psi > 210$, mithin
$k = 8{,}8354$
$x = 3{,}4500$

$\log n\ \psi = 5{,}3854$
$\psi = 218{,}2' = 3^\circ\ 38{,}2'$ und
$\varphi = 86^\circ\ 21{,}8'$

5. $x = 12$ gesucht φ;
$k = 8{,}8357$
$x = 12$

$\log n\ \psi = -\ 3{,}1643$
$\log 10^4\ \psi = \quad 9{,}2103$

$\log 10^4\ \psi = \quad 6{,}0460$
$10^4\ \psi = \quad 422{,}4$
$\psi = \quad 0{,}04224$

$\log \mathfrak{Sin}\ 12 = \log \operatorname{tg} \varphi = \log \operatorname{cotg} \psi = -\log \operatorname{tg} \psi$
$= 4{,}9106$ und
$\mathfrak{Sin}\ 12 = 81400$

Der genaue Werth von $\mathfrak{Sin}\ 12$ ist gleich $81377{,}4$; um denselben zu bestimmen muss man Tabellen mit 6 Decimalstellen benutzen.

6. Ohne Hülfe der Tabelle für x zu $\varphi = 20^\circ\ 11{,}6'$ den Werth von x zu finden.

$20^\circ\ 11{,}6' = 1211{,}6'$

$\log x = \log 1211{,}6 + \frac{1}{3}\, d\, E \log \cos \varphi - 3{,}5363$

$\log 1211{,}6 = 3{,}0834$
$\frac{1}{3}\, d\, E \log \cos \varphi = \quad 92$

$3{,}0926$
$3{,}5363$

$\log x = 0{,}5563 - 1$
$x = 0{,}36$

7. Ohne Hülfe der Tabelle aus $x = 0{,}38\,\varphi$ zu bestimmen.

$$\log x = 0{,}5798 - 1$$
$$3{,}5363$$
$$\log \alpha = 3{,}1161 \qquad \alpha = 1306' = 21^\circ\,46'$$
$$\tfrac{1}{3}\,d\,E \log\cos\alpha = \quad 107$$
$$\log \varphi' = 3{,}1054 \qquad \varphi = 1275' = 21^\circ\,15'$$
$$\log \alpha = 3{,}1161$$
$$\tfrac{1}{3}\,d\,E \log\cos\varphi = \quad 102$$
$$\log \varphi_1 = 3{,}1059 \qquad \varphi_1 = 1276' = 21^\circ\,16'$$

8. Da $\log\mathrm{n}\,\mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$ der zur Breite φ gehörige Meridionaltheil einer Kugel vom Radius 1 ist, so kann diese Tabelle auch zur Construction der Seekarten, so wie zur Lösung der Aufgaben dienen, welche beim Segeln in der Loxodromie vorkommen.

9. Zu schärfern Rechnungen kann man die, in meiner Sammlung fünfstelliger, logarithmischer, trigonometrischer nautischer und astronomischer Tafeln (Universitäts-Buchhandlung, Kiel 1873) gegebene fünfstellige Tabelle von $\log\mathrm{n}\,\mathrm{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$ benutzen.

7. Die Logarithmen der hyperbolischen Functionen.

1. Bezeichnet man:

$$\frac{1}{\mathrm{arc}\,1'} = \frac{10800'}{\pi} = 3437{,}75'$$

durch k, so ist auf fünf Dezimalen genau:

$$\log \mathfrak{Sin}\,\psi = 2\log\psi - \log\sin k\psi, \text{ von } \psi = 0 \text{ bis } \psi = 0{,}17.$$

2. $\log \mathfrak{Cof}\,\psi = \log\cos k\psi = \log\sec k\psi$, von $\psi = 0$ bis $\psi = 0{,}08$

$$\log \mathfrak{Tg}\,\psi = 2\log\psi - \log\mathrm{tg}\,k\psi.$$

3. Wenn $h < 0{,}01$, so ist von $\psi = 0{,}16$ an:

$$\log \mathfrak{Sin}\,(\psi + h) = \log \mathfrak{Sin}\,\psi + \frac{0{,}43429\,h}{\mathfrak{Tg}\,\psi + 0{,}5\,h} \text{ und, wenn}$$

$$\log \mathfrak{Sin}\,(\psi + h) - \log \mathfrak{Sin}\,\psi = \Delta \text{ gesetzt wird:}$$

$$h = \frac{\Delta\,\mathfrak{Tg}\,\psi}{0{,}43429 - 0{,}5\,\Delta}$$

4. Wenn wiederum $h < 0{,}01$, so ist von $\psi = 0{,}08$ an:

$$\log \mathfrak{Cof}\,(\psi + h) = \log \mathfrak{Cof}\,\psi + 0{,}43429\,h\,\mathfrak{Tg}\,\psi, \text{ und}$$

$$h = \frac{2{,}30259\,\Delta}{\mathfrak{Tg}\,\psi}, \text{ wenn}$$

$$\log \mathfrak{Cof}\,(\psi + h) - \log \mathfrak{Cof}\,\psi = \Delta.$$

Wenn in 3 und 4, $\psi + h = 0{,}6593$ ist, so ist $h = 0{,}0093$ zu setzen.

5. Von $\psi = 1$ an, ist angenähert, wenn $h < 1$ und
$\log \mathfrak{Sin}(\psi + 0{,}01) - \log \mathfrak{Sin}\,\psi = D$ gesetzt wird:
$\log \mathfrak{Sin}(\psi + h) = \log \mathfrak{Sin}\,\psi + hD$ und

$$h = \frac{\log \mathfrak{Sin}(\psi + h) - \log \mathfrak{Sin}\,\psi}{D}$$

Wenn $\psi + h = 1{,}4567$, so ist $h = 0{,}67$ zu setzen.

6. Die Formeln für $\log \mathfrak{Cof}(\psi + h)$ und $\log \mathfrak{Tg}(\psi + h)$ ergeben sich aus der vorstehenden Formel, wenn man in derselben Sin mit Cof resp. Tg vertauscht.

Die Resultate werden für log Sin und log Cof um so genauer, je grösser ψ wird.

7. Für $\psi = 6$ ist auf fünf Stellen $\mathfrak{Sin}\,\psi = \mathfrak{Cof}\,\psi$ und $\mathfrak{Tg}\,\psi = 1$. Ist ψ grösser als 6, so benutze man zur Bestimmung von Sin ψ die Formel:

$$\mathfrak{Sin}\,\psi = 2\,\mathfrak{Sin}\frac{\psi}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\psi}{2}.$$

Für $\frac{\psi}{2} = 6$ ergiebt sich hieraus $\mathfrak{Sin}\,12 = 81377$, während der genaue Werth 81377,4 ist.

Man kann auch, da:
$\mathfrak{Sin}(6 + h) = \mathfrak{Sin}\,6\,\mathfrak{Cof}\,h + \mathfrak{Cof}\,6\,\mathfrak{Sin}\,h$ und wegen $\mathfrak{Sin}\,6 = \mathfrak{Cof}\,6$
$\mathfrak{Sin}(6 + h) = \mathfrak{Sin}\,6\,(\mathfrak{Cof}\,h + \mathfrak{Sin}\,h)$ oder
$\mathfrak{Sin}(6 + h) = e^h\,\mathfrak{Sin}\,6$ setzen. Hieraus:

$$\log \mathfrak{Sin}(6 + h) = h \log e + \log \mathfrak{Sin}\,6$$
$$= 0{,}4342945\,h + \log \mathfrak{Sin}\,6 \text{ und}$$
$$h = 2{,}3025851\,(\log \mathfrak{Sin}(6 + h) - \log \mathfrak{Sin}\,6).$$

Eine Tabelle für $\log \mathfrak{Sin}\,\psi$ von $\psi = 0$ bis $\psi = 2{,}399$ von Tausendtel zu Tausendtel enthält meine Abhandlung: Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bogen mit Hülfe der hyperbolischen Functionen. (Ernst und Korn. Berlin 1854.)

8. Die hyperbolischen Sinus und Cosinus.

1. Für Werthe $\psi < 0{,}01$ ist auf 5 Dezimalen $\mathfrak{Sin}\,\psi = \psi$ und $\mathfrak{Cof}\,\psi = 1$, daher auch, wenn h sehr klein:

$$\mathfrak{Sin}(\psi + h) = \mathfrak{Sin}\,\psi + h\,\mathfrak{Cof}\,\psi \text{ und}$$
$$\mathfrak{Cof}(\psi + h) = \mathfrak{Cof}\,\psi + h\,\mathfrak{Sin}\,\psi.$$

2. Diese Tabelle kann auch zur Bestimmung von
e^{ψ} und $e^{-\psi}$ dienen, da:
$e^{\psi} = \mathfrak{Cof}\,\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi$ und
$e^{-\psi} = \mathfrak{Cof}\,\psi - \mathfrak{Sin}\,\psi$ ist.

Ferner: $e^{\psi + h} = e^{\psi}\,e^{h}$ und, wenn h sehr klein und ψ nicht sehr gross, ist angenähert:

$$e^{\psi + h} = e^{\psi} + h\,e^{\psi}.$$

9. Tabelle der rechtwinkligen Dreiecke.

Diese Tabelle enthält die Katheten aller rechtwinkligen Dreiecke, deren Winkel, in Graden, ganze Zahlen sind und zwar für die Hypotenusen von 1 bis 10. Für grössere Hypotenusen lassen sich die Katheten in folgender Weise bestimmen:

Ist $c = 348$, $\alpha = 35^0$ so hat man:

Für $c = 300$	$a = 172{,}07$
„ $= 40$	„ $= 22{,}94$
„ $= 8$	„ $= 4{,}59$
$c = 348$ giebt	$a = 199{,}6$

10. Tabelle von Seite 34 bis 54.

In der zweiten Colonne stehen die Umfänge aller Kreise vom Durchmesser 1 bis 1000, also alle Vielfachen von π von 1 bis 1000.

Diese Tabelle kann auch zur Bestimmung von $a\pi$ und $\frac{a}{\pi}$ benutzt werden, wenn a eine beliebige Zahl ist.

Soll $45678\,\pi$ bestimmt werden, so hat man:

$45600\,\pi$	$= 143257$
$78\,\pi$	$= 245$
$45678\,\pi$	$= 143502.$

Soll $\frac{248}{\pi}$ berechnet werden, so suche man das der Zahl 248 nächste Vielfache von π, man findet dadurch als nächsten Quotienten 78. Der Rest $248 - 245{,}0442 = 2{,}9558$ giebt, wenn das Komma um drei Stellen nach rechts gerückt wird, als nächstes Vielfaches von π die Zahl 941, also ist $\frac{248}{\pi} = 78{,}941$.

Die dritte Colonne giebt die Inhalte aller Kreise vom Durchmesser 1 bis 1000. Ist der Durchmesser grösser als 1000, so rechne man nach der Formel $r^2\,\pi$ mit Hülfe der zweiten Colonne.

Die beiden letzten Colonnen geben die Quadrat und Cubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 1000. Hat man aus grössern Zahlen die zweite oder dritte Wurzel zu suchen, so findet man die drei ersten Stellen a dieser Wurzeln aus den Colonnen d^2 resp. d^3, die folgenden drei oder vier Stellen ergeben sich durch eine abgekürzte Division nach den Formeln:

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + x} \text{ und } \sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b : 3}{a^2 + ax}.$$

a^2 resp. a^3 sind die Quadrate resp. Cuben, welche nächst kleiner als die Radikanden sind, x bezeichnen die angenäherten Werthe von $\frac{b}{2a}$ resp. $\frac{b:3}{a^2}$.

11. Zur Interpolation bei den andern Tabellen benutze man die im Abschnitte Interpolation gegebenen Formeln.

Nachträge.

A. Um aus der Gleichung:

$a \sin x + b \cos x = c$, den Winkel x zu bestimmen,

setze man: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, alsdann ist

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

B. Den Formeln auf Seite 166 kann man noch zufügen.

1. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha + \beta x + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log n \frac{2\alpha + \beta x - 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta x + b x^2)}}{x}.$$

2. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{-\alpha + \beta x + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{4\alpha b + \beta^2}}$$

C. Aus den Formeln 6 und 7 auf Seite 174 und 175 ergiebt sich noch:

3. $$\int_0^{2nh} f_{(a+x)}\,dx = h\left(f_{(a)} + 4f_{(a+h)} + 2f_{(a+2h)} \cdots\cdots + 4f_{(b-h)} + f_{(b)}\right)$$

$$- \left(D^2 f_{(b)} - D^2 f_{(a)}\right) \frac{h^4}{60} \cdots\cdots$$

$$- \left(D^{2\alpha-1} f_{(b)} - D^{2\alpha-1} f_{(a)}\right) (-1)^{\alpha} (4^{\alpha} - 4) \frac{B_{2\alpha-1}}{(2\alpha)!} h^{2\alpha}. \quad \alpha > 1.$$

D. Die allgemeine Differenzialgleichung in *B* auf Seite 178 lässt sich für No. 4 auch in folgender Form schreiben.

$$e^{\alpha_1 x} D e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} D e^{(\alpha_3 - \alpha_2)x} \cdots\cdots D e^{(\alpha_n - \alpha_{n-1})x} D e^{-\alpha_n x} y = Q.$$

Tabellen

zur reinen Mathematik.

0	′	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°	0′	0	− ∞	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
	10′	1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
	20	2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
	30	3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
	40	4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
	50	5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
1°	0′	6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
	10	7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
	20	8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
	30	9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
	40	10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
	50	11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
2°	0′	12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
	10	13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
	20	14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
	30	15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
	40	16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
	50	17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
3°	0′	18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
	10	19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
	20	20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
	30	21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
	40	22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
	50	23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
4°	0′	24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
	10	25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
	20	26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
	30	27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
	40	28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
	50	29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
5°	0′	30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
	10	31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
	20	32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
	30	33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
	40	34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
	50	35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
6°	0′	36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
	10	37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
	20	38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
	30	39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
	40	40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
	50	41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
7°	0′	42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
	10	43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
	20	44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
	30	45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
	40	46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
	50	47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
8°	0′	48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
	10′	49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

°	′	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8°	20′	50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
	30	51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
	40	52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
	50	53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
9°	0′	54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
	10	55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
	20	56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
	30	57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
	40	58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
	50	59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
10°	0′	60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
	10	61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
	20	62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
	30	63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
	40	64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
	50	65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
11°	0′	66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
	10	67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
	20	68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
	30	69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
	40	70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
	50	71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
12°	0′	72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
	10	73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
	20	74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
	30	75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
	40	76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
	50	77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
13°	0′	78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
	10	79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
	20	80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
	30	81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
	40	82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
	50	83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
14°	0′	84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
	10	85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
	20	86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
	30	87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
	40	88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
	50	89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
15°	0′	90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
	10	91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
	20	92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
	30	93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
	40	94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
	50	95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
16°	0′	96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
	10	97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
	20	98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
	30	99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	1744	1897	2047	2195	2341
7	2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694
8	3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951
10	6052	6151	6250	6347	6444	6540	6634	6728	6821	6913
11	7005	7095	7185	7274	7362	7449	7536	7622	7707	7791
12	7875	7958	8040	8122	8203	8283	8363	8442	8520	8598
13	8675	8752	8828	8903	8978	9053	9127	9200	9273	4,9345
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	0689
16	0752	0814	0876	0938	0999	1059	1120	1180	1240	1299
17	1358	1417	1475	1533	1591	1648	1705	1761	1818	1874
18	1930	1985	2040	2095	2149	2204	2257	2311	2364	2417
19	2470	2523	2575	2627	2679	2730	2781	2832	2883	2933
20	2983	3033	3083	3132	3181	3230	3279	3327	3375	3423
21	3471	3519	3566	3613	3660	3706	3753	3799	3845	3891
22	3936	3982	4027	4072	4116	4161	4205	4250	4293	4337
23	4381	4424	4467	4510	4553	4596	4638	4681	4723	4765
24	4806	4848	4889	4931	4972	5013	5053	5094	5134	5175
25	5215	5255	5294	5334	5373	5413	5452	5491	5530	5568
26	5607	5645	5683	5722	5759	5797	5835	5872	5910	5947
27	5984	6021	6058	6095	6131	6168	6204	6240	6276	6312
28	6348	6384	6419	6454	6490	6525	6560	6595	6630	6664
29	6699	6733	6768	6802	6836	6870	6904	6937	6971	7004
30	7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333
31	7366	7398	7430	7462	7494	7526	7557	7589	7621	7652
32	7683	7714	7746	7777	7807	7838	7869	7900	7930	7961
33	7991	8021	8051	8081	8111	8141	8171	8201	8230	8260
34	8289	8319	8348	8377	8406	8435	8464	8493	8522	8551
35	8579	8608	8636	8665	8693	8721	8749	8777	8805	8833
36	8861	8889	8916	8944	8972	8999	9026	9054	9081	9108
37	9135	9162	9189	9216	9243	9269	9296	9322	9349	9375
38	9402	9428	9454	9480	9506	9532	9558	9584	9610	9636
39	9661	9687	9713	9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
40	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
41	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	0259	0283	0307	0331	0355	0379
42	0403	0426	0450	0474	0497	0521	0544	0568	0591	0615
43	0638	0661	0684	0707	0730	0753	0776	0799	0822	0845
44	0868	0890	0913	0936	0958	0981	1003	1026	1048	1070
45	1092	1115	1137	1159	1181	1203	1225	1247	1269	1291
46	1312	1334	1356	1377	1399	1420	1442	1463	1485	1506
47	1527	1549	1570	1591	1612	1633	1654	1675	1696	1717
48	1738	1759	1779	1800	1821	1841	1862	1883	1903	1924
49	1944	1964	1985	2005	2025	2046	2066	2086	2106	2126

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
51	2344	2364	2383	2403	2422	2442	2461	2480	2500	2519
52	2538	2558	2577	2596	2615	2634	2653	2672	2691	2710
53	2729	2748	2766	2785	2804	2823	2841	2860	2879	2897
54	2916	2934	2953	2971	2989	3008	3026	3044	3063	3081
55	3099	3117	3135	3154	3172	3190	3208	3226	3244	3261
56	3279	3297	3315	3333	3351	3368	3386	3404	3421	3439
57	3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3578	3596	3613
58	3630	3648	3665	3682	3699	3716	3733	3750	3767	3784
59	3801	3818	3835	3852	3869	3886	3902	3919	3936	3953
60	3969	3986	4003	4019	4036	4052	4069	4085	4102	4118
61	4135	4151	4167	4184	4200	4216	4232	4249	4265	4281
62	4297	4313	4329	4345	4362	4378	4394	4409	4425	4441
63	4457	4473	4489	4505	4520	4536	4552	4568	4583	4599
64	4615	4630	4646	4661	4677	4693	4708	4723	4739	4754
65	4770	4785	4800	4816	4831	4846	4862	4877	4892	4907
66	4922	4938	4953	4968	4983	4998	5013	5028	5043	5058
67	5073	5088	5103	5117	5132	5147	5162	5177	5191	5206
68	5221	5236	5250	5265	5280	5294	5309	5323	5338	5352
69	5367	5381	5396	5410	5425	5439	5453	5468	5482	5497
70	5511	5525	5539	5554	5568	5582	5596	5610	5624	5639
71	5653	5667	5681	5695	5709	5723	5737	5751	5765	5779
72	5793	5806	5820	5834	5848	5862	5876	5889	5903	5917
73	5930	5944	5958	5971	5985	5999	6012	6026	6039	6053
74	6067	6080	6093	6107	6120	6134	6147	6161	6174	6187
75	6201	6214	6227	6241	6254	6267	6280	6294	6307	6320
76	6333	6346	6359	6373	6386	6399	6412	6425	6438	6451
77	6464	6477	6490	6503	6516	6529	6542	6554	6567	6580
78	6593	6606	6619	6631	6644	6657	6670	6682	6695	6708
79	6720	6733	6746	6758	6771	6783	6796	6809	6821	6834
80	6846	6859	6871	6884	6896	6908	6921	6933	6946	6958
81	6970	6983	6995	7007	7020	7032	7044	7056	7069	7081
82	7093	7105	7117	7130	7142	7154	7166	7178	7190	7202
83	7214	7226	7238	7250	7262	7274	7286	7298	7310	7322
84	7334	7346	7358	7370	7382	7393	7405	7417	7429	7441
85	7452	7464	7476	7488	7499	7511	7523	7534	7546	7558
86	7569	7581	7593	7604	7616	7627	7639	7650	7662	7673
87	7685	7696	7708	7719	7731	7742	7754	7765	7776	7788
88	7799	7811	7822	7833	7845	7856	7867	7878	7890	7901
89	7912	7923	7935	7946	7957	7968	7979	7991	8002	8013
90	8024	8035	8046	8057	8068	8079	8090	8101	8112	8123
91	8134	8145	8156	8167	8178	8189	8200	8211	8222	8233
92	8244	8255	8265	8276	8287	8298	8309	8320	8330	8341
93	8352	8363	8373	8384	8395	8405	8416	8427	8437	8448
94	8459	8469	8480	8491	8501	8512	8522	8533	8544	8554
95	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8648	8659
96	8669	8680	8690	8701	8711	8721	8732	8742	8752	8763
97	8773	8783	8794	8804	8814	8824	8835	8845	8855	8865
98	8876	8886	8896	8906	8916	8926	8937	8947	8957	8967
99	8977	8987	8997	9007	9017	9027	9037	9048	9058	9068

Addition

A	B									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3010	2961	2911	2863	2815	2767	2721	2674	2629	2584
0,1	2539	2495	2452	2409	2366	2325	2284	2243	2203	2163
0,2	2124	2086	2048	2011	1974	1938	1902	1867	1832	1798
0,3	1764	1731	1699	1666	1635	1604	1573	1543	1513	1484
0,4	1455	1427	1399	1372	1345	1319	1293	1267	1242	1218
0,5	1193	1169	1146	1123	1101	1078	1057	1035	1014	0993
0,6	0973	0953	0934	0915	0896	0877	0859	0841	0824	0807
0,7	0790	0774	0757	0742	0726	0711	0696	0681	0667	0653
0,8	0639	0625	0612	0599	0586	0574	0562	0550	0538	0526
0,9	0515	0504	0493	0482	0472	0462	0452	0442	0432	0423
1,0	0414	0405	0396	0387	0379	0371	0363	0355	0347	0339
1,1	0332	0325	0318	0311	0304	0297	0291	0284	0278	0272
1,2	0266	0260	0254	0248	0243	0238	0232	0227	0222	0217
1,3	0212	0208	0203	0199	0194	0190	0186	0181	0177	0173
1,4	0170	0166	0162	0158	0155	0151	0148	0145	0141	0138
1,5	0135	0132	0129	0126	0123	0121	0118	0115	0113	0110
1,6	0108	0105	0103	0101	0098	0096	0094	0092	0090	0088
1,7	0086	0084	0082	0080	0078	0077	0075	0073	0071	0070
1,8	0068	0067	0065	0064	0062	0061	0060	0058	0057	0056
1,9	0054	0053	0052	0051	0050	0048	0047	0046	0045	0044
2,0	0043	0042	0041	0040	0039	0039	0038	0037	0036	0035
2,1	0034	0034	0033	0032	0031	0031	0030	0029	0029	0028
2,2	0027	0027	0026	0025	0025	0024	0024	0023	0023	0022
2,3	0022	0021	0021	0020	0020	0019	0019	0018	0018	0018
2,4	0017	0017	0016	0016	0016	0015	0015	0015	0014	0014
2,5	0014	0013	0013	0013	0013	0012	0012	0012	0011	0011
2,6	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0009	0009	0009	0009
2,7	0009	0008	0008	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007
2,8	0007	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0006	0006
2,9	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,	0004	0003	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0001	0001

Subtraction

A	B									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,30	0,3021	3011	3001	2991	2981	2971	2961	2951	2942	2932
0,31	2922	2913	2903	2894	2884	2875	2866	2856	2847	2838
0,32	2829	2819	2810	2801	2792	2783	2774	2765	2756	2748
0,33	2739	2730	2721	2713	2704	2695	2687	2678	2670	2661
0,34	2653	2644	2636	2628	2619	2611	2603	2595	2586	2578
0,35	2570	2562	2554	2546	2538	2530	2522	2515	2507	2499
0,36	2491	2483	2476	2468	2460	2453	2445	2438	2430	2423
0,37	2415	2408	2400	2393	2386	2378	2371	2364	2357	2350
0,38	2342	2335	2328	2321	2314	2307	2300	2293	2286	2279
0,39	2272	2265	2259	2252	2245	2238	2231	2225	2218	2211

A	Subtraction B									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,40	0,2205	2198	2192	2185	2179	2172	2166	2159	2153	2146
0,41	2140	2134	2127	2121	2115	2108	2102	2096	2090	2084
0,42	2077	2071	2065	2059	2053	2047	2041	2035	2029	2023
0,43	2017	2011	2005	2000	1994	1988	1982	1976	1971	1965
0,44	1959	1953	1948	1942	1936	1931	1925	1920	1914	1909
0,45	1903	1898	1892	1887	1881	1876	1871	1865	1860	1854
0,46	1849	1844	1839	1833	1828	1823	1818	1812	1807	1802
0,47	1797	1792	1787	1782	1777	1772	1767	1762	1757	1752
0,48	1747	1742	1737	1732	1727	1722	1717	1712	1708	1703
0,49	1698	1693	1688	1684	1679	1674	1670	1665	1660	1656
0,50	1651	1646	1642	1637	1633	1628	1623	1619	1614	1610
0,51	1605	1601	1596	1592	1588	1583	1579	1574	1570	1566
0,52	1561	1557	1553	1549	1544	1540	1536	1531	1527	1523
0,53	1519	1515	1511	1506	1502	1498	1494	1490	1486	1482
0,54	1478	1474	1470	1466	1462	1458	1454	1450	1446	1442
0,55	1438	1434	1430	1426	1422	1418	1414	1411	1407	1403
0,56	1399	1395	1392	1388	1384	1380	1377	1373	1369	1365
0,57	1362	1358	1354	1351	1347	1343	1340	1336	1333	1329
0,58	1325	1322	1318	1315	1311	1308	1304	1301	1297	1294
0,59	1290	1287	1283	1280	1277	1273	1270	1266	1263	1260
0,60	1256	1253	1250	1246	1243	1240	1236	1233	1230	1226
0,5	1651	1605	1561	1519	1478	1438	1399	1362	1325	1290
0,6	1256	1223	1191	1160	1130	1101	1072	1045	1018	0992
0,7	0967	0942	0918	0895	0872	0850	0829	0808	0788	0768
0,8	0749	0731	0713	0695	0678	0661	0645	0629	0614	0599
0,9	0584	0570	0556	0543	0530	0517	0504	0492	0480	0469
1,0	0458	0447	0436	0425	0415	0405	0396	0386	0377	0368
1,1	0359	0351	0343	0335	0327	0319	0311	0304	0297	0290
1,2	0283	0276	0270	0264	0257	0251	0245	0240	0234	0229
1,3	0223	0218	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0185	0181
1,4	0176	0172	0168	0164	0161	0157	0153	0150	0146	0143
1,5	0140	0136	0133	0130	0127	0124	0121	0118	0116	0113
1,6	0110	0108	0105	0103	0101	0098	0096	0094	0092	0090
1,7	0088	0086	0084	0082	0080	0078	0076	0074	0073	0071
1,8	0069	0068	0066	0065	0063	0062	0060	0059	0058	0056
1,9	0055	0054	0053	0051	0050	0049	0048	0047	0046	0045
2,0	0044	0043	0042	0041	0040	0039	0038	0037	0036	0035
2,1	0035	0034	0033	0032	0032	0031	0030	0029	0029	0028
2,2	0027	0027	0026	0026	0025	0024	0024	0023	0023	0022
2,3	0022	0021	0021	0020	0020	0019	0019	0019	0018	0018
2,4	0017	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0015	0014	0014
2,5	0014	0013	0013	0013	0013	0012	0012	0012	0011	0011
2,6	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0010	0009	0009	0009
2,7	0009	0008	0008	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007
2,8	0007	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0006	0006
2,9	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,	0004	0003	0003	0002	0002	0001	0001	0001	0001	0001

Grad	Logarith. Sinus.							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	$-\infty$	7,4637	7,7648	7,9408	8,0658	8,1627	8,2419	89
1	8,2419	8,3088	8,3668	8,4179	4637	5050	5428	88
2	5428	5776	6097	6397	6677	6940	7188	87
3	7188	7423	7645	7857	8059	8251	8436	86
4	8436	8613	8783	8946	9104	8,9256	8,9403	85
5	8,9403	8,9545	8,9682	8,9816	8,9945	9,0070	9,0192	84
6	9,0192	9,0311	9,0426	9,0539	9,0648	0755	0859	83
7	0859	0961	1060	1157	1252	1345	1436	82
8	1436	1525	1612	1697	1781	1863	1943	81
9	1943	2022	2100	2176	2251	2324	2397	80
10	2397	2468	2538	2606	2674	2740	2806	79
11	2806	2870	2934	2997	3058	3119	3179	78
12	3179	3238	3296	3353	3410	3466	3521	77
13	3521	3575	3629	3682	3734	3786	3837	76
14	3837	3887	3937	3986	4035	4083	4130	75
15	4130	4177	4223	4269	4314	4359	4403	74
16	4403	4447	4491	4533	4576	4618	4659	73
17	4659	4700	4741	4781	4821	4861	4900	72
18	4900	4939	4977	5015	5052	5090	5126	71
19	5126	5163	5199	5235	5270	5306	5341	70
20	5341	5375	5409	5443	5477	5510	5543	69
21	5543	5576	5609	5641	5673	5704	5736	68
22	5736	5767	5798	5828	5859	5889	5919	67
23	5919	5948	5978	6007	6036	6065	6093	66
24	6093	6121	6149	6177	6205	6232	6259	65
25	6259	6286	6313	6340	6366	6392	6418	64
26	6418	6444	6470	6495	6521	6546	6570	63
27	6570	6595	6620	6644	6668	6692	6716	62
28	6716	6740	6763	6787	6810	6833	6856	61
29	6856	6878	6901	6923	6946	6968	6990	60
30	6990	7012	7033	7055	7076	7097	7118	59
31	7118	7139	7160	7181	7201	7222	7242	58
32	7242	7262	7282	7302	7322	7342	7361	57
33	7361	7380	7400	7419	7438	7457	7476	56
34	7476	7494	7513	7531	7550	7568	7586	55
35	7586	7604	7622	7640	7657	7675	7692	54
36	7692	7710	7727	7744	7761	7778	7795	53
37	7795	7811	7828	7844	7861	7877	7893	52
38	7893	7910	7926	7941	7957	7973	7989	51
39	7989	8004	8020	8035	8050	8066	8081	50
40	8081	8096	8111	8125	8140	8155	8169	49
41	8169	8184	8198	8213	8227	8241	8255	48
42	8255	8269	8283	8297	8311	8324	8338	47
43	8338	8351	8365	8378	8391	8405	8418	46
44	8418	8431	8444	8457	8469	8482	8495	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Logarith. Cosinus.

$\log \sin \alpha' = \log \alpha' - (3{,}5363 + \frac{1}{3}\, d\, E \log \cos \alpha)$

Grad	Logarith. Cosinus.							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	9,9999	89
1	9,9999	9,9999	9,9999	9,9999	9,9998	9,9998	9997	88
2	9997	9997	9996	9996	9995	9995	9994	87
3	9994	9993	9993	9992	9991	9990	9989	86
4	9989	9989	9988	9987	9986	9985	9983	85
5	9983	9982	9981	9980	9979	9977	9976	84
6	9976	9975	9973	9972	9971	9969	9968	83
7	9968	9966	9964	9963	9961	9959	9958	82
8	9958	9956	9954	9952	9950	9948	9946	81
9	9946	9944	9942	9940	9938	9936	9934	80
10	9934	9931	9929	9927	9924	9922	9919	79
11	9919	9917	9914	9912	9909	9907	9904	78
12	9904	9901	9899	9896	9893	9890	9887	77
13	9887	9884	9881	9878	9875	9872	9869	76
14	9869	9866	9863	9859	9856	9853	9849	75
15	9849	9846	9843	9839	9836	9832	9828	74
16	9828	9825	9821	9817	9814	9810	9806	73
17	9806	9802	9798	9794	9790	9786	9782	72
18	9782	9778	9774	9770	9765	9761	9757	71
19	9757	9752	9748	9743	9739	9734	9730	70
20	9730	9725	9721	9716	9711	9706	9702	69
21	9702	9697	9692	9687	9682	9677	9672	68
22	9672	9667	9661	9656	9651	9646	9640	67
23	9640	9635	9629	9624	9618	9613	9607	66
24	9607	9602	9596	9590	9584	9579	9573	65
25	9573	9567	9561	9555	9549	9543	9537	64
26	9537	9530	9524	9518	9512	9505	9499	63
27	9499	9492	9486	9479	9473	9466	9459	62
28	9459	9453	9446	9439	9432	9425	9418	61
29	9418	9411	9404	9397	9390	9383	9375	60
30	9375	9368	9361	9353	9346	9338	9331	59
31	9331	9323	9315	9308	9300	9292	9284	58
32	9284	9276	9268	9260	9252	9244	9236	57
33	9236	9228	9219	9211	9203	9194	9186	56
34	9186	9177	9169	9160	9151	9142	9134	55
35	9134	9125	9116	9107	9098	9089	9080	54
36	9080	9070	9061	9052	9042	9033	9023	53
37	9023	9014	9004	8995	8985	8975	8965	52
38	8965	8955	8945	8935	8925	8915	8905	51
39	8905	8895	8884	8874	8864	8853	8843	50
40	8843	8832	8821	8810	8800	8789	8778	49
41	8778	8767	8756	8745	8733	8722	8711	48
42	8711	8699	8688	8676	8665	8653	8641	47
43	8641	8629	8618	8606	8594	8582	8569	46
44	8569	8557	8545	8532	8520	8507	8495	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Logarith. Sinus.

$\log \alpha' \doteq \log \sin \alpha' + 3{,}5363 + \frac{1}{3} d E \log \cos \alpha$

Grad	Logarith. Tangens. 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	— ∞	7,4637	7,7648	7,9409	8,0658	8,1627	8,2419	89
1	8,2419	8,3089	8,3669	8,4181	4638	5053	5431	88
2	5431	5779	6101	6401	6682	6945	7194	87
3	7194	7429	7652	7865	8067	8261	8446	86
4	8446	8624	8795	8960	9118	8,9272	8,9420	85
5	8,9420	8,9563	8,9701	8,9836	8,9966	9,0093	9,0216	84
6	9,0216	9,0336	9,0453	9,0567	9,0678	0786	0891	83
7	0891	0995	1096	1194	1291	1385	1478	82
8	1478	1569	1658	1745	1831	1915	1997	81
9	1997	2078	2158	2236	2313	2389	2463	80
10	2463	2536	2609	2680	2750	2819	2887	79
11	2887	2953	3020	3085	3149	3212	3275	78
12	3275	3336	3397	3458	3517	3576	3634	77
13	3634	3691	3748	3804	3859	3914	3968	76
14	3968	4021	4074	4127	4178	4230	4281	75
15	4281	4331	4381	4430	4479	4527	4575	74
16	4575	4622	4669	4716	4762	4808	4853	73
17	4853	4898	4943	4987	5031	5075	5118	72
18	5118	5161	5203	5245	5287	5329	5370	71
19	5370	5411	5451	5491	5531	5571	5611	70
20	5611	5650	5689	5727	5766	5804	5842	69
21	5842	5879	5917	5954	5991	6028	6064	68
22	6064	6100	6136	6172	6208	6243	6279	67
23	6279	6314	6348	6383	6417	6452	6486	66
24	6486	6520	6553	6587	6620	6654	6687	65
25	6687	6720	6752	6785	6817	6850	6882	64
26	6882	6914	6946	6977	7009	7040	7072	63
27	7072	7103	7134	7165	7196	7226	7257	62
28	7257	7287	7317	7348	7378	7408	7438	61
29	7438	7467	7497	7526	7556	7585	7614	60
30	7614	7644	7673	7701	7730	7759	7788	59
31	7788	7816	7845	7873	7902	7930	7958	58
32	7958	7986	8014	8042	8070	8097	8125	57
33	8125	8153	8180	8208	8235	8263	8290	56
34	8290	8317	8344	8371	8398	8425	8452	55
35	8452	8479	8506	8533	8559	8586	8613	54
36	8613	8639	8666	8692	8718	8745	8771	53
37	8771	8797	8824	8850	8876	8902	8928	52
38	8928	8954	8980	9006	9032	9058	9084	51
39	9084	9110	9135	9161	9187	9212	9238	50
40	9238	9264	9289	9315	9341	9366	9392	49
41	9392	9417	9443	9468	9494	9519	9544	48
42	9544	9570	9595	9621	9646	9671	9697	47
43	9697	9722	9747	9772	9798	9823	9848	46
44	9848	9874	9899	9924	9949	9975	10,0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Logarith. Cotangens.

$\log \operatorname{tg} \alpha' = \log \alpha' - (3{,}5363 - \frac{2}{3}\, d\, E \log \cos \alpha')$

Grad	Logarith. Cotangens.							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	2,5363	2,2352	2,0591	1,9342	1,8373	1,7581	89
1	1,7581	1,6911	1,6331	1,5819	5362	4947	4569	88
2	4569	4221	3899	3599	3318	3055	2806	87
3	2806	2571	2348	2135	1933	1739	1554	86
4	1554	1376	1205	1040	0882	1,0728	1,0580	85
5	1,0580	1,0437	1,0299	1,0164	1,0034	0,9907	0,9784	84
6	0,9784	0,9664	0,9547	0,9433	0,9322	9214	9109	83
7	9109	9005	8904	8806	8709	8615	8522	82
8	8522	8431	8342	8255	8169	8085	8003	81
9	8003	7922	7842	7764	7687	7611	7537	80
10	7537	7464	7391	7320	7250	7181	7113	79
11	7113	7047	6980	6915	6851	6788	6725	78
12	6725	6664	6603	6542	6483	6424	6366	77
13	6366	6309	6252	6196	6141	6086	6032	76
14	6032	5979	5926	5873	5822	5770	5719	75
15	5719	5669	5619	5570	5521	5473	5425	74
16	5425	5378	5331	5284	5238	5192	5147	73
17	5147	5102	5057	5013	4969	4925	4882	72
18	4882	4839	4797	4755	4713	4671	4630	71
19	4630	4589	4589	4509	4469	4429	4389	70
20	4389	4350	4311	4273	4234	4196	4158	69
21	4158	4121	4083	4046	4009	3972	3936	68
22	3936	3900	3864	3828	3792	3757	3721	67
23	3721	3686	3652	3617	3583	3548	3514	66
24	3514	3480	3447	3413	3380	3346	3313	65
25	3313	3280	3248	3215	3183	3150	3118	64
26	3118	3086	3054	3023	2991	2960	2928	63
27	2928	2897	2866	2835	2804	2774	2743	62
28	2743	2713	2683	2652	2622	2592	2562	61
29	2562	2533	2503	2474	2444	2415	2386	60
30	2386	2356	2327	2299	2270	2241	2212	59
31	2212	2184	2155	2127	2098	2070	2042	58
32	2042	2014	1986	1958	1930	1903	1875	57
33	1875	1847	1820	1792	1765	1737	1710	56
34	1710	1683	1656	1629	1602	1575	1548	55
35	1548	1521	1494	1467	1441	1414	1387	54
36	1387	1361	1334	1308	1282	1255	1229	53
37	1229	1203	1176	1150	1124	1098	1072	52
38	1072	1046	1020	0994	0968	0942	0916	51
39	0916	0890	0865	0839	0813	0788	0762	50
40	0762	0736	0711	0685	0659	0634	0608	49
41	0608	0583	0557	0532	0506	0481	0456	48
42	0456	0430	0405	0379	0354	0329	0303	47
43	0303	0278	0253	0228	0202	0177	0152	46
44	0152	0126	0101	0076	0051	0025	0,0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Logarith. Tangens.

$$\log \alpha' = \log \operatorname{tg} \alpha' + 3{,}5363 - \tfrac{2}{3}\, d\, E \log \cos \alpha'$$

Grad	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85
5	0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80
10	1736	1765	1794	1822	1851	1880	1908	79
11	1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78
12	2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77
13	2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76
14	2419	2447	2476	2504	2532	2560	2588	75
15	2588	2616	2644	2672	2700	2728	2756	74
16	2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73
17	2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72
18	3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71
19	3256	3283	3311	3338	3365	3393	3420	70
20	3420	3448	3475	3502	3529	3557	3584	69
21	3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68
22	3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67
23	3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66
24	4067	4094	4120	4147	4173	4200	4226	65
25	4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384	64
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62
28	4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61
29	4848	4874	4899	4924	4950	4975	5000	60
30	5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150	59
31	5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58
32	5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57
33	5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56
34	5592	5616	5640	5664	5688	5712	5736	55
35	5736	5760	5783	5807	5831	5854	5878	54
36	5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53
37	6018	6041	6065	6088	6111	6134	6157	52
38	6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51
39	6293	6316	6338	6361	6383	6406	6428	50
40	6428	6450	6472	6494	6517	6539	6561	49
41	6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48
42	6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47
43	6820	6841	6862	6884	6905	6926	6947	46
44	6947	6967	6988	7009	7030	7050	7071	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Cosinus

Grad	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	89
1	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	9994	88
2	9994	9993	9992	9990	9989	9988	9986	87
3	9986	9985	9983	9981	9980	9978	9976	86
4	9976	9974	9971	9969	9967	9964	9962	85
5	9962	9959	9957	9954	9951	9948	9945	84
6	9945	9942	9939	9936	9932	9929	9925	83
7	9925	9922	9918	9914	9911	9907	9903	82
8	9903	9899	9894	9890	9886	9881	9877	81
9	9877	9872	9868	9863	9858	9853	9848	80
10	9848	9843	9838	9833	9827	9822	9816	79
11	9816	9811	9805	9799	9793	9787	9781	78
12	9781	9775	9769	9763	9757	9750	9744	77
13	9744	9737	9730	9724	9717	9710	9703	76
14	9703	9696	9689	9681	9674	9667	9659	75
15	9659	9652	9644	9636	9628	9621	9613	74
16	9613	9605	9596	9588	9580	9572	9563	73
17	9563	9555	9546	9537	9528	9520	9511	72
18	9511	9502	9492	9483	9474	9465	9455	71
19	9455	9446	9436	9426	9417	9407	9397	70
20	9397	9387	9377	9367	9356	9346	9336	69
21	9336	9325	9315	9304	9293	9283	9272	68
22	9272	9261	9250	9239	9228	9216	9205	67
23	9205	9194	9182	9171	9159	9147	9135	66
24	9135	9124	9112	9100	9088	9075	9063	65
25	9063	9051	9038	9026	9013	9001	8988	64
26	8988	8975	8962	8949	8936	8923	8910	63
27	8910	8897	8884	8870	8857	8843	8829	62
28	8829	8816	8802	8788	8774	8760	8746	61
29	8746	8732	8718	8704	8689	8675	8660	60
30	8660	8646	8631	8616	8601	8587	8572	59
31	8572	8557	8542	8526	8511	8496	8480	58
32	8480	8465	8450	8434	8418	8403	8387	57
33	8387	8371	8355	8339	8323	8307	8290	56
34	8290	8274	8258	8241	8225	8208	8192	55
35	8192	8175	8158	8141	8124	8107	8090	54
36	8090	8073	8056	8039	8021	8004	7986	53
37	7986	7969	7951	7934	7916	7898	7880	52
38	7880	7862	7844	7826	7808	7790	7771	51
39	7771	7753	7735	7716	7698	7679	7660	50
40	7660	7642	7623	7604	7585	7566	7547	49
41	7547	7528	7509	7490	7470	7451	7431	48
42	7431	7412	7392	7373	7353	7333	7314	47
43	7314	7294	7274	7254	7234	7214	7193	46
44	7193	7173	7153	7133	7112	7092	7071	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Sinus

Grad	Tangens. 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0173	89
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88
2	0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87
3	0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86
4	0699	0729	0758	0787	0816	0846	0875	85
5	0875	0904	0934	0963	0992	1022	1051	84
6	1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83
7	1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82
8	1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81
9	1584	1614	1644	1673	1703	1733	1763	80
10	1763	1793	1823	1853	1883	1914	1944	79
11	1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78
12	2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77
13	2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76
14	2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75
15	2679	2711	2742	2773	2805	2836	2867	74
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73
17	3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72
18	3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71
19	3443	3476	3508	3541	3574	3607	3640	70
20	3640	3673	3706	3739	3772	3805	3839	69
21	3839	3872	3906	3939	3973	4006	4040	68
22	4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67
23	4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66
24	4452	4487	4522	4557	4592	4628	4663	65
25	4663	4699	4734	4770	7806	4841	4877	64
26	4877	4913	4950	4986	5022	5059	5095	63
27	5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62
28	5317	5354	5392	5430	5467	5505	5543	61
29	5543	5581	5619	5658	5696	5735	5774	60
30	5774	5812	5851	5890	5930	5969	6009	59
31	6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58
32	6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57
33	6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56
34	6745	6787	6830	6873	6916	6959	7002	55
35	7002	7046	7089	7133	7177	7221	7265	54
36	7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53
37	7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52
38	7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51
39	8098	8146	8195	8243	8292	8342	8391	50
40	8391	8441	8491	8541	8591	8642	8693	49
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48
42	9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47
43	9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46
44	9657	9713	9770	9827	9884	9942	1,0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
				Cotangens.				

Grad	Cotangens. 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,774	171,885	114,589	85,940	68,750	57,2900	89
1	57,2900	49,1039	42,9641	38,1885	34,3678	31,2416	28,6363	88
2	28,6363	26,4316	24,5418	22,9038	21,4704	20,2056	19,0811	87
3	19,0811	18,0750	17,1693	16,3499	15,6048	14,9244	14,3007	86
4	14,3007	13,7267	13,1969	12,7062	12,2505	11,8262	11,4301	85
5	11,4301	11,0594	10,7119	10,3854	10,0780	9,7882	9,5144	84
6	9,5144	9,2553	9,0098	8,7769	8,5555	8,3450	8,1443	83
7	8,1443	7,9530	7,7704	7,5958	7,4287	7,2687	7,1154	82
8	7,1154	6,9682	6,8269	6,6912	6,5606	6,4348	6,3138	81
9	6,3138	6,1970	6,0844	5,9758	5,8708	5,7694	5,6713	80
10	5,6713	5,5764	5,4845	5,3955	5,3093	5,2257	5,1446	79
11	5,1446	5,0658	4,9894	4,9152	4,8430	4,7729	4,7046	78
12	4,7046	4,6382	4,5736	4,5107	4,4494	4,3897	4,3315	77
13	4,3315	4,2747	4,2193	4,1653	4,1126	4,0611	4,0108	76
14	4,0108	3,9617	3,9136	3,8667	3,8208	3,7760	3,7321	75
15	3,7321	3,6891	3,6470	3,6059	3,5656	3,5261	3,4874	74
16	3,4874	3,4495	3,4124	3,3759	3,3402	3,3052	3,2709	73
17	3,2709	3,2371	3,2041	3,1716	3,1397	3,1084	3,0777	72
18	3,0777	3,0475	3,0178	2,9887	2,9600	2,9319	2,9042	71
19	2,9042	2,8770	2,8502	2,8239	2,7980	2,7725	2,7475	70
20	2,7475	2,7228	2,6985	2,6746	2,6511	2,6279	2,6051	69
21	2,6051	2,5826	2,5605	2,5386	2,5172	2,4960	2,4751	68
22	2,4751	2,4545	2,4342	2,4142	2,3945	2,3750	2,3559	67
23	2,3559	2,3369	2,3183	2,2998	2,2817	2,2637	2,2460	66
24	2,2460	2,2286	2,2113	2,1943	2,1775	2,1609	2,1445	65
25	2,1445	2,1283	2,1123	2,0965	2,0809	2,0655	2,0503	64
26	2,0503	2,0353	2,0204	2,0057	1,9912	1,9768	1,9626	63
27	1,9626	1,9486	1,9347	1,9210	1,9074	1,8940	8807	62
28	8807	8676	8546	8418	8291	8165	8040	61
29	8040	7917	7796	7675	7556	7437	7321	60
30	7321	7205	7090	6977	6864	6753	6643	59
31	6643	6534	6426	6319	6212	6107	6003	58
32	6003	5900	5798	5697	5597	5497	5399	57
33	5399	5301	5204	5108	5013	4919	4826	56
34	4826	4733	4641	4550	4460	4370	4281	55
35	4281	4193	4106	4019	3934	3848	3764	54
36	3764	3680	3597	3514	3432	3351	3270	53
37	3270	3190	3111	3032	2954	2876	2799	52
38	2799	2723	2647	2572	2497	2423	2349	51
39	2349	2276	2203	2131	2059	1988	1918	50
40	1918	1847	1778	1708	1640	1571	1504	49
41	1504	1436	1369	1303	1237	1171	1106	48
42	1106	1041	0977	0913	0850	0786	0724	47
43	0724	0661	0599	0538	0477	0416	0355	46
44	0355	0295	0235	0176	0117	0058	1,0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Tangens

Grad	Secans							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0001	1,0002	89
1	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	88
2	0006	0007	0008	0010	0011	0012	0014	87
3	0014	0015	0017	0019	0021	0022	0024	86
4	0024	0027	0029	0031	0033	0036	0038	85
5	0038	0041	0043	0046	0049	0052	0055	84
6	0055	0058	0061	0065	0068	0072	0075	83
7	0075	0079	0082	0086	0090	0094	0098	82
8	0098	0102	0107	0111	0116	0120	0125	81
9	0125	0129	0134	0139	0144	0149	0154	80
10	0154	0160	0165	0170	0176	0181	0187	79
11	0187	0193	0199	0205	0211	0217	0223	78
12	0223	0230	0236	0243	0249	0256	0263	77
13	0263	0270	0277	0284	0291	0299	0306	76
14	0306	0314	0321	0329	0337	0345	0353	75
15	0353	0361	0369	0377	0386	0394	0403	74
16	0403	0412	0421	0429	0439	0448	0457	73
17	0457	0466	0476	0485	0495	0505	0515	72
18	0515	0525	0535	0545	0555	0566	0576	71
19	0576	0587	0598	0608	0619	0631	0642	70
20	0642	0653	0665	0676	0688	0700	0711	69
21	0711	0723	0736	0748	0760	0773	0785	68
22	0785	0798	0811	0824	0837	0850	0864	67
23	0864	0877	0891	0904	0918	0932	0946	66
24	0946	0961	0975	0989	1004	1019	1034	65
25	1034	1049	1064	1079	1095	1110	1126	64
26	1126	1142	1158	1174	1190	1207	1223	63
27	1223	1240	1257	1274	1291	1308	1326	62
28	1326	1343	1361	1379	1397	1415	1434	61
29	1434	1452	1471	1490	1509	1528	1547	60
30	1547	1566	1586	1606	1626	1646	1666	59
31	1666	1687	1707	1728	1749	1770	1792	58
32	1792	1813	1835	1857	1879	1901	1924	57
33	1924	1946	1969	1992	2015	2039	2062	56
34	2062	2086	2110	2134	2158	2183	2208	55
35	2208	2233	2258	2283	2309	2335	2361	54
36	2361	2387	2413	2440	2467	2494	2521	53
37	2521	2549	2577	2605	2633	2661	2690	52
38	2690	2719	2748	2778	2807	2837	2868	51
39	2868	2898	2929	2960	2991	3022	3054	50
40	3054	3086	3118	3151	3184	3217	3250	49
41	3250	3284	3318	3352	3386	3421	3456	48
42	3456	3492	3527	3563	3600	3636	3673	47
43	3673	3711	3748	3786	3824	3863	3902	46
44	3902	3941	3980	4020	4061	4101	1,4142	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Cosecans

Grad.	Cosecans 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,775	171,888	114,593	85,946	68,757	57,2987	89
1	57,2987	49,1141	42,9757	38,2016	34,3823	31,2576	28,6537	88
2	28,6537	26,4505	24,5621	22,9256	21,4937	20,2303	19,1073	87
3	19,1073	18,1026	17,1984	16,3804	15,6368	14,9579	14,3356	86
4	14,3356	13,7631	13,2347	12,7455	12,2913	11,8684	11,4737	85
5	11,4737	11,1045	10,7585	10,4334	10,1275	9,8391	9,5668	84
6	9,5668	9,3092	9,0652	8,8337	8,6138	8,4047	8,2055	83
7	8,2055	8,0156	7,8344	7,6613	7,4957	7,3372	7,1853	82
8	7,1853	7,0396	6,8998	6,7655	6,6363	6,5121	6,3925	81
9	6,3925	6,2772	6,1661	6,0589	5,9554	5,8554	5,7588	80
10	5,7588	5,6653	5,5749	5,4874	5,4026	5,3205	5,2408	79
11	5,2408	5,1636	5,0886	5,0159	4,9452	4,8765	4,8097	78
12	4,8097	4,7448	4,6817	4,6202	4,5604	4,5022	4,4454	77
13	4,4454	4,3901	4,3362	4,2837	4,2324	4,1824	4,1336	76
14	4,1336	4,0859	4,0394	3,9939	3,9495	3,9061	3,8637	75
15	3,8637	3,8222	3,7817	3,7420	3,7032	3,6652	3,6280	74
16	3,6280	3,5915	3,5559	3,5209	3,4867	3,4532	3,4203	73
17	3,4203	3,3881	3,3565	3,3255	3,2951	3,2653	3,2361	72
18	3,2361	3,2074	3,1792	3,1515	3,1244	3,0977	3,0716	71
19	3,0716	3,0458	3,0206	2,9957	2,9713	2,9474	2,9238	70
20	2,9238	2,9006	2,8779	2,8555	2,8334	2,8117	2,7904	69
21	2,7904	2,7695	2,7488	2,7285	2,7085	2,6888	2,6695	68
22	2,6695	2,6504	2,6316	2,6131	2,5949	2,5770	2,5593	67
23	2,5593	2,5419	2,5247	2,5078	2,4912	2,4748	2,4586	66
24	2,4586	2,4426	2,4269	2,4114	2,3961	2,3811	2,3662	65
25	2,3662	2,3515	2,3371	2,3228	2,3088	2,2949	2,2812	64
26	2,2812	2,2677	2,2543	2,2412	2,2282	2,2153	2,2027	63
27	2,2027	2,1902	2,1779	2,1657	2,1537	2,1418	2,1301	62
28	2,1301	2,1185	2,1070	2,0957	2,0846	2,0736	2,0627	61
29	2,0627	2,0519	2,0413	2,0308	2,0204	2,0101	2,0000	60
30	2,0000	1,9900	1,9801	1,9703	1,9606	1,9511	1,9416	59
31	1,9416	1,9323	1,9230	1,9139	1,9048	1,8959	8871	58
32	8871	8783	8697	8612	8527	8443	8361	57
33	8361	8279	8198	8118	8039	7960	7883	56
34	7883	7806	7730	7655	7581	7507	7434	55
35	7434	7362	7291	7221	7151	7081	7013	54
36	7013	6945	6878	6812	6746	6681	6616	53
37	6616	6553	6489	6427	6365	6303	6243	52
38	6243	6183	6123	6064	6005	5948	5890	51
39	5890	5833	5777	5721	5666	5611	5557	50
40	5557	5504	5450	5398	5345	5294	5243	49
41	5243	5192	5141	5092	5042	4993	4945	48
42	4945	4897	4849	4802	4755	4709	4663	47
43	4663	4617	4572	4527	4483	4439	4396	46
44	4396	4352	4310	4267	4225	4183	4142	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Secans

Grad	Arcus					
	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320
2	0349	0378	0407	0436	0465	0495
3	0524	0553	0582	0611	0640	0669
4	0698	0727	0756	0785	0814	0844
5	0873	0902	0931	0960	0989	1018
6	1047	1076	1105	1134	1164	1193
7	1222	1251	1280	1309	1338	1367
8	1396	1425	1454	1484	1513	1542
9	1571	1600	1629	1658	1687	1716
10	1745	1774	1804	1833	1862	1891
11	1920	1949	1978	2007	2036	2065
12	2094	2123	2153	2182	2211	2240
13	2269	2298	2327	2356	2385	2414
14	2443	2473	2502	2531	2560	2589
15	2618	2647	2677	2705	2734	2763
16	2793	2822	2851	2880	2909	2938
17	2967	2996	3025	3054	3083	3113
18	3142	3171	3200	3229	3258	3287
19	3316	3345	3374	3403	3432	3462
20	3491	3520	3549	3578	3607	3636
21	3665	3694	3723	3752	3782	3811
22	3840	3869	3898	3927	3956	3985
23	4014	4043	4072	4102	4131	4160
24	4189	4218	4247	4276	4305	4334
25	4363	4392	4421	4451	4480	4508
26	4538	4567	4596	4625	4654	4683
27	4712	4741	4771	4800	4829	4858
28	4887	4916	4945	4974	5003	5032
29	5061	5091	5120	5149	5178	5207
30	5236	5265	5294	5323	5352	5381
31	5411	5440	5469	5498	5527	5556
32	5585	5614	5643	5672	5701	5730
33	5760	5789	5818	5847	5876	5905
34	5934	5963	5992	6021	6050	6080
35	6109	6138	6167	6196	6225	6254
36	6283	6312	6341	6370	6400	6429
37	6458	6487	6516	6545	6574	6603
38	6632	6661	6690	6720	6749	6778
39	6807	6836	6865	6894	6923	6952
40	6981	7010	7039	7069	7098	7127
41	7156	7185	7214	7243	7272	7301
42	7330	7359	7389	7418	7447	7476
43	7505	7534	7563	7592	7621	7650
44	7679	7709	7738	7767	7796	7825
45	7854	7883	7912	7941	7970	7999

arc $100^0 = 1{,}7453$; arc $200^0 = 3{,}4907$; arc $300^0 = 5{,}2359$

Grad	Arcus.					
	0′	10′	20′	30′	40′	50′
46	0,8029	0,8058	0,8087	0,8116	0,8145	0,8174
47	8203	8232	8261	8290	8319	8348
48	8378	8407	8436	8465	8494	8523
49	8552	8581	8610	8639	8668	8698
50	8727	8756	8785	8814	8843	8872
51	8901	8930	8959	8988	9018	9047
52	9076	9105	9134	9163	9192	9221
53	9250	9279	9308	9338	9367	9396
54	9425	9454	9483	9512	9541	9570
55	9599	9628	9657	9687	9716	9745
56	9774	9803	0,9832	0,9861	0,9890	0,9919
57	0,9948	0,9977	1,0007	1,0036	1,0065	1,0094
58	1,0123	1,0152	0181	0210	0239	0268
59	0297	0326	0356	0385	0414	0443
60	0472	0501	0530	0559	0588	0617
61	0647	0676	0705	0734	0763	0792
62	0821	0850	0879	0908	0937	0966
63	0996	1025	1054	1083	1112	1141
64	1170	1199	1228	1257	1286	1316
65	1345	1374	1403	1432	1461	1490
66	1519	1548	1577	1606	1636	1665
67	1694	1723	1752	1781	1810	1839
68	1868	1897	1926	1955	1985	2014
69	2043	2072	2101	2130	2159	2188
70	2217	2246	2275	2305	2334	2363
71	2392	2421	2450	2479	2508	2537
72	2566	2595	2625	2654	2683	2712
73	2741	2770	2799	2828	2857	2886
74	2915	2945	2974	3003	3032	3061
75	3090	3119	3148	3177	3206	3235
76	3265	3294	3323	3352	3381	3410
77	3439	3468	3497	3526	3555	3584
78	3614	3643	3672	3701	3730	3759
79	3788	3817	3846	3875	3904	3934
80	3963	3992	4021	4050	4079	4108
81	4137	4166	4195	4224	4254	4283
82	4312	4341	4370	4399	4428	4457
83	4486	4515	4544	4573	4603	4632
84	4661	4690	4719	4748	4777	4806
85	4835	4864	4893	4923	4952	4981
86	5010	5039	5068	5097.	5126	5155
87	5184	5213	5243	5272	5301	5330
88	5359	5388	5417	5446	5475	5504
89	5533	5563	5592	5621	5650	5679
90	5708	5737	5766	5795	5824	5853

arc $180^0 = 3{,}1416$; arc $270^0 = 4{,}7124$; arc $360^0 = 6{,}2832$.

Grad	logn tg. $\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	ψ′	k
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0	8,8357
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	10	8357
2	0349	0378	0407	0436	0466	0495	20	8357
3	9524	0553	0582	0611	0640	0670	30	8357
4	0699	0728	0757	0786	0815	0845	40	8357
5	0874	0903	0932	0961	0991	1020	50	8357
6	1049	1078	1108	1137	1166	1195	60	8357
7	1225	1254	1283	1313	1342	1371	70	8357
8	1401	1430	1460	1489	1518	1548	80	8357
9	1577	1607	1636	1666	1695	1725	90	8357
10	1754	1784	1813	1843	1873	1902	100	8357
11	1932	1961	1991	2021	2050	2080	110	8357
12	2110	2140	2169	2199	2229	2259	120	8356
13	2289	2319	2348	2378	2408	2438	130	8356
14	2468	2498	2528	2558	2588	2618	140	8355
15	2648	2679	2709	2739	2769	2799	150	8355
16	2830	2860	2890	2920	2951	2981	160	8355
17	3012	3042	3072	3103	3133	3164	170	8355
18	3195	3225	3256	3286	3317	3348	180	8354
19	3379	3409	3440	3471	3502	3533	190	8354
20	3564	3595	3626	3657	3688	3719	200	8354
21	3750	3781	3813	3844	3875	3906	210	8354
22	3938	3969	4001	4032	4064	4095	220	8354
23	4127	4158	4190	4222	4253	4285	230	8354
24	4317	4349	4381	4413	4445	4477	240	8353
25	4509	4541	4573	4605	4637	4670	250	8353
26	4702	4735	4767	4799	4832	4865	260	8353
27	4897	4930	4963	4995	5028	5061	270	8352
28	5094	5127	5160	5193	5226	5259	280	8352
29	5293	5326	5359	5393	5426	5460	290	8351
30	5493	5527	5560	5594	5628	5662	300	8351
31	5696	5730	5764	5798	5832	5866	310	8350
32	5900	5935	5969	6004	6038	6073	320	8350
33	6107	6142	6177	6212	6247	6282	330	8350
34	6317	6352	6387	6422	6457	6493	340	8349
35	6528	6564	6600	6635	6671	6707	350	8348
36	6743	6779	6815	6851	6887	6923	360	8348
37	6960	6996	7033	7070	7106	7143	370	8347
38	7180	7217	7254	7291	7328	7366	380	8347
39	7403	7440	7478	7516	7553	7591	390	8346
40	7629	7667	7705	7743	7782	7820	400	8346
41	7859	7897	7936	7975	8014	8053	410	8345
42	8092	8131	8170	8210	8249	8289	420	8344
43	8328	8368	8408	8448	8488	8529	430	8344
44	8569	8610	8650	8691	8732	8773	440	8343
45	8814	8855	8896	8938	8979	9021	450	8342

Wenn $90 - \varphi = \psi$ in Minuten u. $x = \text{logn tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$

dann ist $x = k - \text{logn } \psi$

Grad	$\log\operatorname{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)$ 0′	10′	20′	30′	40′	50′	ψ'	k
46	0,9063	0,9105	0,9147	0,9189	0,9231	0,9274	460	8,8342
47	9316	9359	9402	9445	9488	9531	470	8341
48	9575	9618	9662	9706	0,9750	0,9794	480	8341
49	0,9838	0,9882	0,9927	0,9972	1,0017	1,0062	490	8340
50	1,0107	1,0152	1,0198	1,0243	0289	0335	500	8339
51	0381	0428	0474	0521	0567	0614	510	8339
52	0662	0709	0756	0804	0852	0900	520	8338
53	0948	0997	1045	1094	1143	1192	530	8338
54	1242	1291	1341	1391	1441	1492	540	8337
55	1542	1593	1644	1695	1747	1799	550	8336
56	1851	1903	1955	2008	2060	2113	560	8335
57	2167	2220	2274	2328	2382	2437	570	8334
58	2492	2547	2602	2657	2713	2769	580	8333
59	2826	2882	2939	2996	3054	3112	590	8332
60	3170	3228	3287	3345	3405	3464	600	8331
61	3524	3584	3645	3705	3767	3828	610	8330
62	3890	3952	4014	4077	4140	4204	620	8330
63	4268	4332	4397	4462	4527	4593	630	8329
64	4659	4726	4793	4860	4928	4996	640	8328
65	5065	5134	5203	5273	5343	5414	650	8327
66	5485	5557	5629	5702	5775	5849	660	8326
67	5923	5998	6073	6149	6225	6302	670	8326
68	6379	6457	6536	6615	6695	6775	680	8325
69	6856	6937	7019	7102	7185	7269	690	8324
70	7354	7440	7526	7612	7700	7788	700	8323
71	7877	7967	8057	8149	8241	8334	710	8322
72	8427	8522	8617	8714	8811	8909	720	8320
73	9008	9108	9209	9311	1,9414	1,9518	730	8319
74	1,9623	1,9729	1,9836	1,9944	2,0054	2,0164	740	8318
75	2,0276	2,0389	2,0503	2,0619	0736	0854	750	8317
76	0973	1094	1217	1340	1466	1593	760	8316
77	1721	1851	1983	2117	2252	2389	770	8315
78	2528	2669	2812	2957	3104	3253	780	8314
79	3404	3558	3714	3872	4033	4196	790	8313
80	4362	4531	4703	4878	5056	5237	800	8312
81	5421	5609	5800	5995	6193	6396	810	8310
82	6603	6814	7030	7250	7476	7706	820	8310
83	7942	8184	2,8431	2,8685	2,8945	2,9212	830	8308
84	2,9487	2,9769	3,0060	3,0359	3,0667	3,0985	840	8307
85	3,1313	3,1652	2004	2368	2746	3138	850	8306
86	3547	3973	4417	4883	5371	5884	860	8305
87	3,6425	3,6997	3,7604	3,8249	3,8939	3,9681	870	8304
88	4,0481	4,1352	4,2305	4,3359	4,4536	4,5872	880	8302
89	4,7413	4,9237	5,1468	5,4345	5,8400	6,5331	890	8301
90	∞						900	8300

Wenn $90 - \varphi = \psi$ in Minuten u. $x = \log\operatorname{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)$

dann ist $\log\psi = k - x$

ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	lg Tg ψ	Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	lg Tg ψ	Tg ψ
0,00	− ∞	0,00000	− ∞	0,00000	0,50	9,71692	0,05217	9,66475	0,46211
01	8,00001	00002	7,99998	01000	51	72624	05419	67205	46995
02	30106	00009	8,30097	02000	52	73540	05625	67915	47769
03	47719	00020	47699	02999	53	74442	05834	68608	48538
04	60218	00035	60183	03998	54	75330	06046	69284	49299
05	69915	00054	69861	04996	55	76204	06262	69942	50052
06	77841	00078	77763	05993	56	77065	06481	70584	50797
07	84545	00106	84439	06989	57	77914	06703	71211	51536
08	90355	00139	90216	07983	58	78751	06929	71822	52266
09	8,95483	00175	95307	08976	59	79576	07157	72419	52990
10	9,00072	00217	8,99855	09967	60	80390	07389	73001	53704
11	04227	00262	9,03966	10956	61	81194	07624	73570	54413
12	08022	00312	07711	11943	62	81987	07862	74125	55112
13	11517	00366	11151	12927	63	82770	08102	74667	55805
14	14755	00424	14331	13909	64	83543	08346	75197	56490
15	17772	00487	17285	14888	65	84308	08593	75714	57166
16	20598	00554	20044	15865	66	85063	08843	76220	57836
17	23254	00625	22629	16838	67	85809	09095	76714	58498
18	25762	00700	25062	17808	68	86548	09351	77197	59152
19	28136	00779	27357	18775	69	87278	09609	77669	59798
20	30392	00863	29529	19737	70	88000	09870	78130	60437
21	32541	00951	31590	20696	71	88715	10134	78581	61067
22	34592	01043	33550	21652	72	89423	10401	79022	61691
23	36555	01139	35416	22603	73	90123	10670	79453	62306
24	38437	01239	37198	23549	74	90817	10942	79875	62914
25	40246	01343	38903	24492	75	91504	11216	80288	63516
26	41986	01452	40534	25430	76	92185	11494	80691	64108
27	43663	01564	42099	26363	77	92859	11773	81086	64693
28	45282	01681	43601	27290	78	93527	12055	81472	65271
29	46847	01801	45046	28214	79	94190	12340	81850	65842
30	48362	01926	46436	29131	80	94846	12627	82219	66403
31	49830	02054	47775	30043	81	95498	12917	82581	66959
32	51254	02187	49067	30951	82	96144	13209	82935	67507
33	52637	02323	50314	31852	83	96784	13503	83281	68047
34	53981	02463	51518	32748	84	97420	13800	83620	68580
35	55290	02607	52682	33637	85	98051	14099	83952	69107
36	56564	02756	53809	34522	86	98677	14400	84277	69626
37	57807	02907	54899	35399	87	99299	14704	84595	70137
38	59019	03063	55956	36271	88	9,99916	15009	84906	70642
39	60202	03222	56979	37136	89	0,00528	15317	85211	71139
40	61358	03385	57973	37995	90	01137	15627	85509	71629
41	62488	03552	58936	38847	91	01741	15939	85802	72114
42	63594	03723	59871	39693	92	02341	16254	86088	72591
43	64677	03897	60780	40532	93	02937	16570	86368	73060
44	65738	04075	61663	41365	94	03530	16888	86642	73522
45	66777	04256	62521	42190	95	04119	17209	86911	73979
46	67797	04441	63356	43009	96	04704	17531	87173	74427
47	68797	04630	64167	43820	97	05286	17855	87431	74870
48	69779	04822	64957	44624	98	05864	18181	87683	75306
49	70744	05018	65726	45421	99	06439	18509	87930	75736
0,50	9,71692	0,05217	9,66475	0,46211	1,00	0,07011	0,18839	9,88172	0,76159

ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ
1,00	0,07011	0,18839	9,88172	1,50	0,32823	0,37151	9,95672
01	07580	19171	88409	51	33303	37545	95758
02	08146	19504	88642	52	33781	37939	95842
03	08708	19839	88869	53	34258	38334	95924
04	09268	20176	89092	54	34735	38730	96005
05	09825	20515	89310	55	35211	39126	96084
06	10379	20855	89524	56	35686	39524	96162
07	10930	21197	89733	57	36160	39921	96238
08	11479	21541	89938	58	36633	40320	96313
09	12025	21886	90139	59	37105	40719	96386
10	12569	22233	90336	60	37577	41119	96457
11	13111	22582	90529	61	38048	41520	96528
12	13649	22931	90718	62	38518	41921	96597
13	14186	23283	90903	63	38987	42323	96664
14	14720	23636	91085	64	39456	42725	96730
15	15253	23990	91262	65	39923	43129	96795
16	15783	24346	91436	66	40391	43532	96858
17	16311	24703	91607	67	40857	43937	96921
18	16836	25062	91774	68	41323	44341	96982
19	17360	25422	91938	69	41788	44747	97042
20	17882	25784	92099	70	42253	45153	97100
21	18402	26146	92256	71	42717	45559	97158
22	18920	26510	92410	72	43180	45966	97214
23	19437	26876	92561	73	43643	46374	97269
24	19951	27242	92709	74	44105	46782	97323
25	20464	27610	92854	75	44567	47191	97376
26	20975	27979	92996	76	45028	47600	97428
27	21485	28349	93135	77	45488	48009	97479
28	21993	28721	93272	78	45948	48419	97529
29	22499	29093	93406	79	46408	48830	97578
30	23004	29467	93537	80	46867	49241	97626
31	23507	29842	93665	81	47325	49652	97673
32	24009	30217	93791	82	47783	50064	97719
33	24509	30594	93914	83	48241	50476	97764
34	25008	30972	94035	84	48698	50889	97809
35	25505	31352	94154	85	49154	51302	97852
36	26002	31732	94270	86	49610	51716	97895
37	26496	32113	94384	87	50066	52130	97936
38	26990	32495	94495	88	50521	52544	97977
39	27482	32878	94604	89	50976	52959	98017
40	27974	33262	94712	90	51430	53374	98057
41	28464	33647	94817	91	51884	53789	98095
42	28952	34033	94919	92	52338	54205	98133
43	29440	34420	95020	93	52791	54621	98170
44	29926	34807	95119	94	53244	55038	98206
45	30412	35196	95216	95	53696	55455	98242
46	30896	35585	95311	96	54148	55872	98276
47	31379	35976	95404	97	54600	56290	98311
48	31862	36367	95495	98	55051	56707	98344
49	32343	36759	95584	99	55502	57126	98377
1,50	0,32823	0,37151	9,95672	2,00	0,55953	0,57544	9,98409

ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ
2,00	0,55953	0,57544	9,98409	2,50	0,78177	0,78762	9,99415
01	6403	7963	8440	51	8617	9191	426
02	6853	8382	8471	52	9057	9619	438
03	7303	8802	8502	53	9497	80048	449
04	7753	9221	8531	54	9937	0477	460
05	58202	59641	98560	55	80377	80906	99470
06	8650	60061	8589	56	0816	1335	481
07	9099	0482	8617	57	1256	1764	491
08	9547	0903	8644	58	1695	2194	501
09	9995	1324	8671	59	2134	2623	511
10	60443	61745	8697	60	82573	83052	99521
11	0890	2167	8723	61	3012	3482	530
12	1337	2589	8748	62	3451	3912	540
13	1784	3011	8773	63	3890	4341	549
14	2231	3433	8798	64	4329	4771	558
15	62677	63856	98821	65	84768	85201	99566
16	3123	4278	8845	66	5206	5631	575
17	3569	4701	8868	67	5645	6061	583
18	4015	5125	8890	68	6083	6492	592
19	4460	5548	8912	69	6522	6922	600
20	64905	65972	98934	70	86960	87352	99608
21	5350	6396	8955	71	7398	7783	615
22	5795	6820	8975	72	7836	8213	623
23	6240	7244	8996	73	8274	8644	631
24	6684	7668	9016	74	8712	9074	638
25	67128	68093	9035	75	89150	89505	99645
26	7572	8518	9054	76	9588	9936	652
27	8016	8943	9073	77	90026	90367	659
28	8459	9368	9091	78	0463	0798	666
29	8903	9794	9109	79	0901	1229	672
30	69346	70219	99127	80	91339	91660	99679
31	9789	0645	9144	81	1776	2091	685
32	70232	1071	9161	82	2213	2522	691
33	0675	1497	9178	83	2651	2953	698
34	1117	1923	9194	84	3088	3385	704
35	71559	72349	99210	85	93525	93816	99709
36	2002	2776	9226	86	3963	4247	715
37	2444	3203	9241	87	4400	4679	721
38	2885	3630	9256	88	4837	5110	726
39	3327	4056	9271	89	5274	5542	732
40	73769	74484	99285	90	95711	95974	99737
41	4210	4911	9299	91	6148	6405	742
42	4652	5338	9313	92	6584	6837	747
43	5093	5766	9327	93	7021	7269	752
44	5534	6194	9340	94	7458	7701	757
45	75975	76621	99353	95	97895	98133	99762
46	6415	7049	9366	96	8331	8565	767
47	6856	7477	9379	97	8768	8997	771
48	7296	7906	9391	98	9205	9429	776
49	7737	8334	9403	99	0,99641	0,99861	780
2,50	0,78177	0,78762	9,99415	3,00	1,00078	1,00293	9,99785

ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cos ψ	log Tg ψ
3,00	1,00078	1,00293	9,99785	3,50	1,21860	1,21940	9,99921
01	0514	0725	789	51	2296	2373	22
02	0950	1157	793	52	2731	2807	24
03	1387	1589	797	53	3166	3240	25
04	1823	2022	801	54	3601	3674	27
05	02259	02454	99805	55	24036	24107	99928
06	2696	2886	809	56	4471	4541	30
07	3132	3319	813	57	4906	4975	31
08	3568	3751	817	58	5341	5408	33
09	4004	4184	820	59	5776	5842	34
10	04440	04616	99824	60	26211	26275	99935
11	4876	5049	827	61	6646	6709	36
12	5312	5481	831	62	7080	7143	38
13	5748	5914	834	63	7515	7576	39
14	6184	6347	837	64	7950	8010	40
15	06620	06779	99841	65	28385	28444	99941
16	7056	7212	844	66	8820	8878	42
17	7492	7645	847	67	9255	9311	44
18	7927	8078	850	68	9690	9745	45
19	8363	8510	853	69	30125	30179	46
20	08799	08943	99856	70	30559	30612	99947
21	9235	9376	859	71	0994	1046	48
22	9670	9809	861	72	1429	1480	49
23	10106	10242	864	73	1864	1914	50
24	0542	0675	867	74	2299	2348	51
25	10977	11108	99869	75	32733	32781	99952
26	1413	1541	872	76	3168	3215	53
27	1849	1974	875	77	3603	3649	54
28	2284	2407	877	78	4038	4083	55
29	2720	2840	879	79	4472	4517	56
30	13155	13273	99882	80	34907	34951	99957
31	3591	3706	884	81	5342	5384	57
32	4026	4139	886	82	5777	5818	58
33	4461	4573	889	83	6211	6252	59
34	4897	5006	891	84	6646	6686	60
35	15332	15439	99893	85	37081	37120	99961
36	5768	5872	895	86	7515	7554	61
37	6203	6306	897	87	7950	7988	62
38	6638	6739	899	88	8385	8422	63
39	7073	7172	901	89	8819	8856	64
40	17509	17605	99903	90	39254	39290	99964
41	7944	8039	905	91	9689	9724	65
42	8379	8472	907	92	40123	40158	66
43	8814	8906	909	93	0558	0591	66
44	9250	9339	911	94	0993	1025	67
45	19685	19772	99912	95	41427	41459	99968
46	20120	20206	914	96	1862	1893	68
47	0555	0639	916	97	2296	2327	69
48	0990	1073	918	98	2731	2761	70
49	1425	1506	919	99	3166	3195	70
3,50	1,21860	1,21940	9,99921	4,00	1,43600	1,43629	9,99971

ψ	log Sin ψ	log Cof ψ	log Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cof ψ	log Tg ψ
4,00	1,43600	1,43629	9,99971	4,50	1,65324	1,65335	9,99989
01	4035	4063	71	51	5759	5769	89
02	4469	4497	72	52	6193	6203	90
03	4904	4931	73	53	6627	6637	90
04	5339	5365	73	54	7062	7072	90
05	45773	45799	99974	55	67496	67506	99990
06	6208	6233	74	56	7931	7940	90
07	6642	6668	75	57	8365	8374	91
08	7077	7102	75	58	8799	8808	91
09	7511	7536	76	59	9234	9243	91
10	47946	47970	99976	60	69668	69677	99991
11	8380	8404	77	61	70102	70111	91
12	8815	8838	77	62	0537	0545	92
13	9249	9272	78	63	0971	0979	92
14	9684	9706	78	64	1406	1414	92
15	50118	50140	99978	65	71840	71848	99992
16	0553	0574	79	66	2274	2282	92
17	0987	1008	79	67	2709	2716	92
18	1422	1442	80	68	3143	3151	93
19	1856	1876	80	69	3577	3585	93
20	52291	52310	99980	70	74012	74019	99993
21	2725	2745	81	71	4446	4453	93
22	3160	3179	81	72	4881	4887	93
23	3594	3613	82	73	5315	5322	93
24	4029	4047	82	74	5749	5756	93
25	54463	54481	99982	75	76184	76190	99993
26	4898	4915	83	76	6618	6624	94
27	5332	5349	83	77	7052	7059	94
28	5767	5783	83	78	7487	7493	94
29	6201	6217	84	79	7921	7927	94
30	56636	56652	99984	80	78355	78361	99994
31	7070	7086	84	81	8790	8796	94
32	7505	7520	85	82	9224	9230	94
33	7939	7954	85	83	9658	9664	94
34	8373	8388	85	84	80093	80098	95
35	58808	58822	99986	85	80527	80532	99995
36	9242	9256	86	86	0962	0967	95
37	9677	9691	86	87	1396	1401	95
38	60111	60125	86	88	1830	1835	95
39	0546	0559	87	89	2265	2269	95
40	60980	60993	99987	90	82699	82704	99995
41	1414	1427	87	91	3133	3138	95
42	1849	1861	87	92	3568	3572	95
43	2283	2296	88	93	4002	4006	95
44	2718	2730	88	94	4436	4441	96
45	63152	63164	99988	95	84871	84875	99996
46	3587	3598	88	96	5305	5309	96
47	4021	4032	89	97	5739	5743	96
48	4455	4467	89	98	6174	6178	96
49	4890	4901	89	99	6608	6612	96
4,50	1,65324	1,65335	9,99989	5,00	1,87042	1,87046	9,99996

ψ	log Sin ψ	log Cof ψ	log Tg ψ	ψ	log Sin ψ	log Cof ψ	log Tg ψ
5,00	1,87042	1,87046	9,99996	5,50	2,08758	2,08760	9,99999
01	7476	7480	6	51	9193	9194	
02	7911	7915	6	52	9627	9628	
03	8345	8349	6	53	10061	10063	
04	8780	8783	6	54	0495	0497	
05	89214	89217	99996	55	10930	10931	99999
06	9648	9652	7	56	1364	1365	
07	90083	90086	7	57	1798	1800	
08	0517	0520	7	58	2233	2234	
09	0951	0955	7	59	2667	2668	
10	91386	91389	99997	60	13101	13103	99999
11	1820	1823	7	61	3536	3537	
12	2254	2257	7	62	3970	3971	
13	2689	2692	7	63	4404	4405	
14	3123	3126	7	64	4839	4840	
15	93557	93560	99997	65	15273	15274	99999
16	3992	3994	7	66	5707	5708	
17	4426	4429	7	67	6141	6142	
18	4860	4863	7	68	6576	6577	
19	5294	5297	7	69	7010	7011	
20	95729	95731	99997	70	17444	17445	99999
21	6163	6166	7	71	7879	7880	
22	6597	6600	7	72	8313	8314	
23	7032	7034	8	73	8747	8748	
24	7466	7469	8	74	9182	9182	
25	97900	97903	99998	75	19616	19617	99999
26	8335	8337	8	76	20050	20051	
27	8769	8771	8	77	0484	0485	
28	9203	9206	8	78	0919	0920	
29	1,99638	1,99640	9,99998	79	1353	1354	
30	2,00072	2,00074	9,99998	80	21787	21788	99999
31	0506	0508	8	81	2222	2222	
32	0941	0943	8	82	2656	2657	
33	1375	1377	8	83	3090	3091	
34	1809	1811	8	84	3525	3525	
35	02244	02246	99998	85	23959	23960	99999
36	2678	2680	8	86	4393	4394	
37	3112	3114	8	87	4828	4828	
38	3547	3548	8	88	5262	5262	
39	3981	3983	8	89	5696	5697	
40	04415	04417	99998	90	26130	26131	99999
41	4849	4851	8	91	6565	6565	
42	5284	5285	8	92	6999	7000	
43	5718	5720	8	93	7433	7434	
44	6152	6154	8	94	7868	7868	
45	06587	06588	99998	95	28302	28303	99999
46	7021	7023	8	96	8736	8737	
47	7455	7457	8	97	9171	9171	
48	7890	7891	8	98	9605	9605	
49	8324	8325	9	99	30039	30040	
5,50	2,08758	2,08760	9,99999	6,00	2,30473	2,30474	9,99999

ψ	Sin ψ	Cos ψ	ψ	Sin ψ	Cos ψ	ψ	Sin ψ	Cos ψ
0,00	0,0000	1,0000	0,50	0,5211	1,1276	1,00	1,1752	1,5431
01	0100	0001	51	5324	1329	05	2539	6038
02	0200	0002	52	5438	1383	10	3356	6685
03	0300	0005	53	5552	1438	15	4208	7374
04	0400	0008	54	5666	1494	20	5095	8107
05	0500	0013	55	5782	1551	25	6019	8884
06	0600	0018	56	5897	1609	30	6984	1,9709
07	0701	0025	57	6014	1669	35	7991	2,0583
08	0801	0032	58	6131	1730	40	1,9043	1509
09	0901	0041	59	6248	1792	45	2,0143	2488
10	1002	0050	60	6367	1855	50	1293	3524
11	1102	0061	61	6485	1919	55	2496	4619
12	1203	0072	62	6605	1984	60	3756	5775
13	1304	0085	63	6725	2051	65	5075	6995
14	1405	0098	64	6846	2119	70	6456	8283
15	1506	0113	65	6967	2188	75	7904	2,9642
16	1607	0128	66	7090	2258	80	2,9422	3,1075
17	1708	0145	67	7213	2330	85	3,1013	2585
18	1810	0162	68	7336	2402	90	2682	4177
19	1911	0181	69	7461	2476	95	4432	5855
20	2013	0201	70	7586	2552	2,00	6269	7622
21	2115	0221	71	7712	2628	05	3,8196	3,9483
22	2218	0243	72	7838	2706	10	4,0219	4,1443
23	2320	0266	73	7966	2785	15	2342	3507
24	2423	0289	74	8094	2865	20	4571	5679
25	2526	0314	75	8223	2947	25	6912	4,7966
26	2629	0340	76	8353	3030	30	4,9370	5,0372
27	2733	0367	77	8484	3114	35	5,1951	2905
28	2837	0395	78	8615	3199	40	4662	5569
29	2941	0423	79	8748	3286	45	5,7510	5,8373
30	3045	0453	80	8881	3374	50	6,0302	6,1323
31	3150	0484	81	9015	3464	55	3645	4426
32	3255	0516	82	9150	3555	60	6,6947	6,7690
33	3360	0549	83	9286	3647	65	7,0417	7,1123
34	3466	0584	84	9423	3740	70	4063	4735
35	3572	0619	85	9561	3835	75	7,7894	7,8533
36	3678	0655	86	9700	3932	80	8,1919	8,2527
37	3785	0692	87	9840	4029	85	8,6150	8,6728
38	3892	0731	88	0,9981	4128	90	9,0596	9,1146
39	4000	0770	89	1,0122	4229	95	9,5268	9,5791
40	4108	0811	90	0265	4331	3,00	10,0179	10,0677
41	4216	0852	91	0409	4434	05	10,5340	10,5814
42	4325	0895	92	0554	4539	10	11,0765	11,1215
43	4434	0939	93	0700	4645	15	11,6466	11,6895
44	4543	0984	94	0847	4753	20	12,2459	12,2866
45	4653	1030	95	0995	4862	25	12,8758	12,9146
46	4764	1077	96	1144	4973	30	13,5379	13,5748
47	4875	1125	97	1294	5085	35	14,2338	14,2689
48	4986	1174	98	1446	5199	40	14,9654	14,9987
49	5098	1225	99	1598	5314	45	15,7343	15,7661

ψ	Sin ψ	Cos ψ	ψ	Sin ψ	Cos ψ	$\frac{t}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$	t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$
50	16,5426	16,5728	6,00	201,7132	201,7156	0,0	0,000	0,0	0,000
55	17,3923	17,4210	05	212,0553	212,0577	1	054	1	112
60	18,2855	18,3128	10	222,9278	222,9300	2	107	2	223
65	19,2243	19,2503	15	234,3576	234,3598	3	160	3	329
70	20,2113	20,2360	20	246,3735	246,3755	4	213	4	428
75	21,2488	21,2723	25	259,0054	259,0074	5	264	5	520
80	22,3394	22,3618	30	272,2850	272,2869	6	314	6	604
85	23,4859	23,5072	35	286,2455	286,2472	7	363	7	678
90	24,6911	24,7113	40	300,9217	300,9233	8	411	8	742
95	25,9581	25,9773	45	316,3504	316,3520	0,9	456	0,9	797
100	27,2899	27,3082	50	332,5700	332,5716	1,0	500	1,0	843
05	28,6900	28,7074	55	349,6213	349,6228	1	542	1	880
10	30,1619	30,1784	60	367,5469	367,5483	2	582	2	910
15	31,7091	31,7249	65	386,3915	386,3928	3	619	3	934
20	33,3357	33,3507	70	406,2023	406,2035	4	655	4	952
25	35,0456	35,0598	75	427,0287	427,0300	5	688	5	966
30	36,8431	36,8567	80	448,9231	448,9242	6	719	6	976
35	38,7328	38,7457	85	471,9399	471,9410	7	748	7	984
40	40,7193	40,7316	90	496,1369	496,1379	8	775	8	989
45	42,8076	42,8193	6,95	521,5744	521,5754	1,9	800	1,9	993
50	45,0030	45,0141	7,00	548,3161	548,3170	2,0	823	2,0	995
55	47,3109	47,3215	05	576,4289	576,4298	1	843	1	997
60	49,7371	49,7472	10	605,9831	605,9839	2	862	2	998
65	52,2877	52,2973	15	637,0526	637,0534	3	879	3	999
70	54,9690	54,9781	20	669,7150	669,7157	4	895	a	log Γ(a)
75	57,7878	57,7965	25	704,0521	704,0528	5	908		
80	60,7511	60,7593	30	740,1497	740,1504	6	921	1,01	0,9975 − 1
85	63,8663	63,8741	35	778,0980	778,0986	7	931	02	9951
90	67,1412	67,1486	40	817,9919	817,9925	8	941	03	9928
95	70,5839	70,5910	45	859,8313	859,9318	2,9	950	04	9905
200	74,2032	74,2099	50	904,0210	904,0215	3,0	957	05	9883
05	78,0080	78,0144	55	950,3711	950,3716	1	963	06	9862
10	82,0079	82,0140	60	999,0976	999,0981	2	969	10	9783
15	86,2128	86,2186	65	1050,323		3	974	15	9699
20	90,6334	90,6389	70	1104,174		4	978	20	9629
25	95,2805	95,2858	75	1160,786		5	982	25	9573
30	100,1659	100,1709	80	1220,301		6	985	30	9530
35	105,3018	105,3065	85	1282,867		7	987	35	9500
40	110,7009	110,7055	90	1348,641		8	990	40	9481
45	116,3769	116,3812	7,95	1417,787		3,9	991	45	9473
50	122,3439	122,3480	8,00	1490,479		4,0	993	50	9475
55	128,6168	128,6207	05	1566,698		1	994	55	9488
60	135,2114	135,2150	10	1647,234		2	995	60	9511
65	142,1440	142,1475	15	1731,690		3	996	65	9543
70	149,4320	149,4354	20	1820,475		4	997	70	9584
75	157,0938	157,0969	25	1913,813		5	998	75	9633
80	165,1482	165,1513	30	2011,936		6	998	80	9691
85	173,6158	173,6186	35	2115,090		7	998	85	9757
90	182,5173	182,5201	40	2223,533		8	999	90	9831
95	191,8754	191,8780	45	2337,537		9	999	95	9912
								99	9982

Ausdruck	Zahlenwerth	Log.	Ausdruck	Zahlenwerth	Log.
$\sqrt{2}$	1,4142	0,1505	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,7071	0,8495—1
$\sqrt{3}$	1,73205	0,2386	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0,57735	0,7614—1
$\sqrt{5}$	2,2361	0,3495	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0,4472	0,6505—1
$\sqrt{6}$	2,4495	0,3891	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	0,40825	0,6109—1
$\sqrt[3]{2}$	1,2599	0,1003	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	0,7937	0,8997—1
$\sqrt[3]{3}$	1,44225	0,1590	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	0,6934	0,8410—1
$\sqrt[3]{5}$	1,7100	0,2330	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$	0,5848	0,7670—1
$\sqrt[3]{6}$	1,8171	0,2594	$\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$	0,5503	0,7406—1
π	3,1416	0,49715	$1 : \pi$	0,31831	0,50285—1
2π	6,2832	0,7982	$1 : 2\pi$	0,15915	0,2018—1
4π	12,5664	1,0992	$1 : 4\pi$	0,07958	0,9008—2
$\pi : 2$	1,5708	0,1961	$2 : \pi$	0,6366	0,8039—1
$\pi : 4$	0,7854	0,8951—1	$4 : \pi$	1,2732	0,1049
$\pi : 3$	1,0472	0,0200	$3 : \pi$	0,9549	0,9800—1
$2\pi : 3$	2,0944	0,3211	$3 : 2\pi$	0,4775	0,6789—1
$4\pi : 3$	4,1888	0,6221	$3 : 4\pi$	0,2387	0,3779—1
$4 : 3\pi$	0,4244	0,6278—1	$3\pi : 4$	2,3562	0,3722
$\pi : 6$	0,5236	0,7190—1	$6 : \pi$	1,9099	0,2810
π^2	9,8696	0,9943	$1 : \pi^2$	0,1013	0,0057—1
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,2486	$\sqrt{1 : \pi}$	0,5642	0,7514—1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657	$\sqrt[3]{1 : \pi}$	0,6828	0,8343—1
$\sqrt[3]{\pi : 6}$	0,8060	0,9063—1	$\sqrt[3]{6 : \pi}$	1,2407	0,0937
$\sqrt[3]{36\,\pi}$	4,8360	0,6845	$\sqrt[3]{1 : 36\,\pi}$	0,3068	0,3155—1
$\text{arc } 1^0 = \frac{\pi}{180}$	0,0174533	0,2419—2	$\frac{1}{\text{arc } 1^0} = \frac{180}{\pi}$	57,2958	1,7581
$\text{arc } 1' = \frac{\pi}{10800}$	0,0002908882	0,4637—4	$\frac{1}{\text{arc } 1'} = \frac{10800}{\pi}$	3437,75	3,5363
$\text{arc } 1'' = \frac{\pi}{648000}$	0,0000048481	0,6856—6	$\frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{648000}{\pi}$	206264,81	5,3144
e	2,7182818285	0,4343	$1 : e$	0,3678794412	0,5657—1

$\pi = 3{,}141592654$ $\quad \log \pi = 0{,}4971499$ $\quad \log n \pi = 1{,}1447299$
$\log n 10 = 2{,}3026$ $\quad \log 10^2 = 4{,}6052$ $\quad \log 10^3 = 6{,}9078$
$\log 10^4 = 9{,}2103$ $\quad \log 10^5 = 11{,}5129$

a	b	$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$	F	α	β	γ
4	3	5	6	53° 7′ 48″	36° 52′ 12″	90° 0′ 0″
12	5	13	30	67 22 49	22 37 11	"
8	15	17	60	28 4 21	61 55 39	"
24	7	25	84	73 44 23	16 15 37	"
20	21	29	210	43 36 10	46 23 50	"
40	9	41	180	77 19 11	12 40 49	"
12	35	37	210	18 55 29	71 4 31	"
60	11	61	330	79 36 40	10 23 20	"
28	45	53	630	31 53 27	58 6 33	"
56	33	65	924	59 29 23	30 30 37	"
84	13	85	546	81 12 9	8 47 51	"
16	63	65	504	14 15 0	75 45 0	"
48	55	73	1320	41 6 43	48 53 17	"
80	39	89	1560	64 0 39	25 59 21	"
112	15	113	840	82 22 19	7 37 41	"
36	77	85	1386	25 3 27	64 56 33	"
72	65	97	2340	47 55 30	42 4 30	"
144	17	145	1224	83 16 1	6 43 59	"
20	99	101	990	11 25 16	78 34 44	"
60	91	109	2730	33 23 55	56 36 5	"
140	51	149	3570	69 59 3	20 0 57	"
180	19	181	1710	83 58 28	6 1 32	"
44	117	125	2574	20 36 35	69 23 25	"
88	105	137	4620	39 57 58	50 2 2	"
15	13	9 + 5	84	67 22 49	53 7 48	59 29 23
15	13	9 − 5	24	112 37 11	53 7 48	14 15 0
37	13	35 + 5	240	67 22 49	18 55 29	93 41 43
37	13	35 − 5	180	112 37 11	18 55 29	48 27 20
37	15	35 + 9	264	53 7 48	18 55 29	107 56 43
37	15	35 − 9	156	126 52 12	18 55 29	34 12 19
53	51	28 +24	1170	61 55 39	58 6 33	59 57 48
53	51	28 −24	90	118 4 21	58 6 33	3 49 6
51	25	45 + 7	624	73 44 23	28 4 21	78 11 16
51	25	45 − 7	456	106 15 37	28 4 21	45 40 2
75	29	72 +20	966	46 23 50	16 15 37	117 20 33
75	29	72 −20	546	133 36 10	16 15 37	30 8 13
145	25	143 + 7	1800	73 44 23	9 31 38	96 43 59
145	25	143 − 7	1632	106 15 37	9 31 38	64 12 45
101	29	99 +21	1200	43 36 10	11 25 16	124 58 34
101	29	99 −21	780	136 23 50	11 25 16	32 10 54
401	41	399 + 9	8160	77 19 11	5 43 29	96 57 20
401	41	399 − 9	7800	102 40 49	5 43 29	71 35 41
195	193	99 +95	16296	60 30 46	59 29 23	59 59 51
195	193	99 −95	336	119 29 14	59 29 23	1 1 23
197	53	195 +45	3360	31 53 27	8 10 16	139 56 17
197	53	195 −45	2100	148 6 33	8 10 16	23 43 10
109	61	91 +11	3060	79 36 40	33 23 55	66 59 25
109	61	91 −11	2400	100 23 20	33 23 55	46 12 45
$(1+y^2)$	$y(1+x^2)$	$(x+y)(xy-1)$	$xy(x+y)(xy-1)$	$2x:(1+x^2) = \sin\alpha$	$2y:(1+y^2) = \sin\beta$	$2(x+y)(xy-1)/(1+x^2)(1+y^2) = \sin\gamma$

$c =$	1		2		3		4		5		
α	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	
1°	0,9998	0,0175	1,9997	0,0349	2,9995	0,0524	3,9994	0,0698	4,9992	0,0873	89°
2	9994	0349	9988	0698	9982	1047	9976	1396	9970	1745	88
3	9986	0523	9973	1047	9959	1570	9945	2093	9931	2617	87
4	9976	0698	9951	1395	9927	2093	9903	2790	9878	3488	86
5	9962	0872	9924	1743	9886	2615	9848	3486	9810	4358	85
6	9945	1045	9890	2091	9836	3136	9781	4181	9726	5226	84
7	9925	1219	9851	2437	9776	3656	9702	4875	9627	6093	83
8	9903	1392	9805	2783	9708	4175	9611	5567	9513	6959	82
9	9877	1564	9754	3129	9631	4693	9508	6257	9384	7822	81
10	9848	1736	9696	3473	9544	5209	9392	6946	9240	8682	80
11	9816	1908	9633	3816	9449	5724	9265	7632	9081	0,9540	79
12	9781	2079	9563	4158	9344	6237	9126	8316	8907	1,0396	78
13	9744	2250	9487	4499	9231	6749	8975	8998	8718	1248	77
14	9703	2419	9406	4838	9109	7258	8812	0,9677	8515	2096	76
15	9659	2588	9319	5176	8978	7765	8637	1,0353	8296	2941	75
16	9613	2756	9225	5513	8838	8269	8450	1025	8063	3782	74
17	9563	2924	9126	5847	8689	8771	8252	1695	7815	4619	73
18	9511	3090	9021	6180	8532	9271	8042	2361	7553	5451	72
19	9455	3256	8910	6511	8366	0,9767	7821	3023	7276	6278	71
20	9397	3420	8794	6840	8191	1,0261	7588	3681	6985	7101	70
21	9336	3584	8672	7167	8007	0751	7343	4335	6679	7918	69
22	9272	3746	8544	7492	7816	1238	7087	4984	6359	8730	68
23	9205	3907	8410	7815	7615	1722	6820	5629	6025	1,9537	67
24	9135	4067	8271	8135	7406	2202	6542	6269	5677	2,0337	66
25	9063	4226	8126	8452	7189	2679	6252	6905	5315	1131	65
26	8988	4384	7976	8767	6964	3151	5952	7535	4940	1919	64
27	8910	4540	7820	9080	6730	3620	5640	8160	4550	2700	63
28	8829	4695	7659	9389	6488	4084	5318	8779	4147	3474	62
29	8746	4848	7492	0,9696	6239	4544	4985	1,9392	3731	4240	61
30	8660	5000	7320	1,0000	5981	5000	4641	2,0000	3301	5000	60
31	8572	5150	7143	0301	5715	5451	4287	0602	2858	5752	59
32	8480	5299	6961	0598	5441	5898	3922	1197	2402	6496	58
33	8387	5446	6773	0893	5160	6339	3547	1786	1934	7232	57
34	8290	5592	6581	1184	4871	6776	3162	2368	1452	7960	56
35	8192	5736	6383	1472	4575	7207	2766	2943	0958	8679	55
36	8090	5878	6180	1756	4271	7634	2361	3511	4,0451	2,9389	54
37	7986	6018	5973	2036	3959	8054	1945	4073	3,9932	3,0091	53
38	7880	6157	5760	2313	3640	8470	1520	4626	9401	0783	52
39	7771	6293	5543	2586	3314	8880	1086	5173	8857	1466	51
40	7660	6428	5321	2856	2981	9284	0642	5712	8302	2139	50
41	7547	6561	5094	3121	2641	1,9682	3,0188	6242	7736	2803	49
42	7431	6691	4863	3383	2294	2,0074	2,9726	6765	7157	3457	48
43	7314	6820	4627	3640	1941	0460	9254	7280	6568	4100	47
44	7193	6947	4387	3894	1580	0840	8774	7786	5967	4733	46
45	0,7071	0,7071	1,4142	1,4142	2,1213	2,1213	2,8284	2,8284	3,5355	3,5355	45
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	α
	1		2		3		4		5		

$c=$	6		7		8		9		10		
α	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	
1°	5,9991	0,1047	6,9989	0,1222	7,9988	0,1396	8,9986	0,1571	9,9985	0,1745	89°
2	9963	2094	9957	2443	9951	2792	9945	3141	9939	3490	88
3	9918	3140	9904	3664	9890	4187	9877	4710	9863	5234	87
4	9854	4185	9829	4883	9805	5580	9781	6278	9756	6976	86
5	9772	5229	9734	6101	9696	6972	9658	7844	9619	0,8716	85
6	9671	6272	9617	7317	9562	8362	9507	0,9408	9452	1,0453	84
7	9553	7312	9478	8531	9404	0,9750	9329	1,0968	9255	2187	83
8	9416	8350	9319	0,9742	9221	1,1134	9124	2526	9027	3917	82
9	9261	0,9386	9138	1,0950	9015	2515	8892	4079	8769	5643	81
10	9088	1,0419	8937	2155	8785	3892	8633	5628	8481	7365	80
11	8898	1449	8714	3357	8530	5265	8346	7173	8163	1,9081	79
12	8689	2475	8470	4554	8252	6633	8033	1,8712	7815	2,0791	78
13	8462	3497	8206	5747	7950	7996	7693	2,0246	7437	2495	77
14	8218	4515	7921	6935	7624	1,9354	7327	1773	7030	4192	76
15	7956	5529	7615	8117	7274	2,0706	6933	3294	6593	5882	75
16	7676	6538	7288	1,9295	6901	2051	6514	4807	6126	7564	74
17	7378	7542	6941	2,0466	6504	3390	6067	6313	5630	2,9237	73
18	7063	8541	6574	1631	6084	4721	5595	7812	5106	3,0902	72
19	6731	1,9534	6186	2790	5642	6045	5097	2,9301	4552	2557	71
20	6382	2,0521	5779	3941	5175	7362	4572	3,0782	3969	4202	70
21	6015	1502	5351	5086	4686	8669	4022	2253	3358	5837	69
22	5631	2476	4903	6222	4175	2,9969	3447	3715	2718	7461	68
23	5230	3444	4435	7351	3640	3,1258	2845	5166	2050	3,9073	67
24	4813	4404	3948	8472	3084	2539	2219	6606	1355	4,0674	66
25	4378	5357	3442	2,9583	2505	3809	1568	8036	9,0631	2262	65
26	3928	6302	2916	3,0686	1904	5070	0891	3,9453	8,9879	3837	64
27	3460	7239	2370	1779	1280	6319	8,0191	4,0859	9101	5399	63
28	2977	8168	1806	2863	7,0636	7558	7,9465	2252	8295	6947	62
29	2477	2,9089	1223	3937	6,9970	3,8785	8716	3633	7462	4,8481	61
30	1961	3,0000	0622	5000	9282	4,0000	7942	5000	6603	5,0000	60
31	1430	0902	6,0002	6053	8573	1203	7145	6353	5717	1504	59
32	0883	1795	5,9363	7094	7844	2394	6324	7693	4805	2992	58
33	5,0320	2678	8707	8125	7094	3571	5480	4,9018	3867	4464	57
34	4,9742	3552	8033	3,9144	6323	4735	4613	5,0327	2904	5919	56
35	9149	4415	7341	4,0150	5532	5886	3724	1622	1915	7358	55
36	8541	5267	6631	1145	4721	7023	2812	2901	8,0902	5,8779	54
37	7918	6109	5904	2127	3891	8145	1877	4163	7,9864	6,0182	53
38	7281	6940	5161	3096	3041	4,9253	7,0921	5409	8801	1566	52
39	6629	7759	4400	4052	2172	5,0346	6,9943	6639	7715	2932	51
40	5963	8567	3623	4995	1284	1423	8944	7851	6604	4279	50
41	5283	3,9364	2830	5924	6,0377	2485	7924	5,9045	5471	5606	49
42	4589	4,0148	2020	6839	5,9452	3530	6883	6,0222	4314	6913	48
43	3881	0920	1195	7740	8508	4560	5822	1380	3135	8200	47
44	3160	1679	5,0354	8626	7547	5573	4741	2519	1934	6,9466	46
45	4,2426	4,2426	4,9497	4,9497	5,6569	5,6569	6,3640	6,3640	7,0711	7,0711	45
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	α
	6		7		8		9		10		

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
1	3,1416	0,7854	1	1	1,0000	1,0000
2	6,2832	3,1416	4	8	4142	2599
3	9,4248	7,0686	9	27	1,7321	4422
4	12,5664	12,5664	16	64	2,0000	5874
5	15,7080	19,6350	25	125	2361	7100
6	18,8496	28,2743	36	216	4495	8171
7	21,9911	38,4846	49	343	6458	1,9129
8	25,1327	50,2655	64	512	2,8284	2,0000
9	28,2743	63,6173	81	729	3,0000	0801
10	31,4159	78,5398	100	1000	1623	1544
11	34,5575	95,0332	121	1331	3166	2240
12	37,6991	113,0973	144	1728	4641	2894
13	40,8407	132,7323	169	2197	6056	3513
14	43,9823	153,9380	196	2744	7417	4101
15	47,1239	176,7146	225	3375	3,8730	4662
16	50,2655	201,0619	256	4096	4,0000	5198
17	53,4071	226,9801	289	4913	1231	5713
18	56,5487	254,4690	324	5832	2426	6207
19	59,6903	283,5287	361	6859	3589	6684
20	62,8319	314,1593	400	8000	4721	7144
21	65,9734	346,3606	441	9261	5826	7589
22	69,1150	380,1327	484	10648	6904	8020
23	72,2566	415,4756	529	12167	7958	8439
24	75,3982	452,3893	576	13824	4,8990	8845
25	78,5398	490,8739	625	15625	5,0000	9240
26	81,6814	530,9292	676	17576	0990	2,9625
27	84,8230	572,5553	729	19683	1962	3,0000
28	87,9646	615,7522	784	21952	2915	0366
29	91,1062	660,5199	841	24389	3852	0723
30	94,2478	706,8583	900	27000	4772	1072
31	97,3894	754,7676	961	29791	5678	1414
32	100,5310	804,2477	1024	32768	6569	1748
33	103,6726	855,2986	1089	35937	7446	2075
34	106,8142	907,9203	1156	39304	8310	2396
35	109,9557	962,1128	1225	42875	5,9161	2711
36	113,0973	1017,8760	1296	46656	6,0000	3019
37	116,2389	1075,2101	1369	50653	0828	3322
38	119,3805	1134,1149	1444	54872	1644	3620
39	122,5221	1194,5906	1521	59319	2450	3912
40	125,6637	1256,6370	1600	64000	3246	4200
41	128,8053	1320,2543	1681	68921	4031	4482
42	131,9469	1385,4424	1764	74088	4807	4760
43	135,0885	1452,2012	1849	79507	5574	5034
44	138,2301	1520,5308	1936	85184	6332	5303
45	141,3717	1590,4313	2025	91125	7082	5569
46	144,5133	1661,9025	2116	97336	7823	5830
47	147,6549	1734,9445	2209	103823	8557	6088
48	150,7964	1809,5574	2304	110592	6,9282	6342
49	153,9380	1885,7410	2401	117649	7,0000	6593
50	157,0796	1963,4954	2500	125000	7,0711	6840

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
51	160,2212	2042,8206	2601	132651	7,1414	3,7084
52	163,3628	2123,7166	2704	140608	2111	7325
53	166,5044	2206,1834	2809	148877	2801	7563
54	169,6460	2290,2110	2916	157464	3485	7798
55	172,7876	2375,8294	3025	166375	4162	8030
56	175,9292	2463,0086	3136	175616	4833	8259
57	179,0708	2551,7586	3249	185193	5498	8485
58	182,2124	2642,0794	3364	195112	6158	8709
59	185,3540	2733,9710	3481	205379	6811	8930
60	188,4956	2827,4334	3600	216000	7460	9149
61	191,6372	2922,4666	3721	226981	8102	9365
62	194,7787	3019,0705	3844	238328	8740	9579
63	197,9203	3117,2453	3969	250047	7,9373	3,9791
64	201,0619	3216,9909	4096	262144	8,0000	4,0000
65	204,2035	3318,3072	4225	274625	0623	0207
66	207,3451	3421,1944	4356	287496	1240	0412
67	210,4867	3525,6524	4489	300763	1854	0615
68	213,6283	3631,6811	4624	314432	2462	0817
69	216,7699	3739,2807	4761	328509	3066	1016
70	219,9115	3848,4510	4900	343000	3666	1213
71	223,0531	3959,1921	5041	357911	4261	1408
72	226,1947	4071,5041	5184	373248	4853	1602
73	229,3363	4185,3868	5329	389017	5440	1793
74	232,4779	4300,8403	5476	405224	6023	1983
75	235,6194	4417,8647	5625	421875	6603	2172
76	238,7610	4536,4598	5776	438976	7178	2358
77	241,9026	4656,6257	5929	456533	7750	2543
78	245,0442	4778,3624	6084	474552	8318	2727
79	248,1858	4901,6699	6241	493039	8882	2908
80	251,3274	5026,5482	6400	512000	8,9443	3089
81	254,4690	5152,9974	6561	531441	9,0000	3267
82	257,6106	5281,0173	6724	551368	0554	3445
83	260,7522	5410,6079	6889	571787	1104	3621
84	263,8938	5541,7694	7056	592704	1652	3795
85	267,0354	5674,5017	7225	614125	2195	3968
86	270,1770	5808,8048	7396	636056	2736	4140
87	273,3186	5944,6787	7569	658503	3274	4310
88	276,4602	6082,1234	7744	681472	3808	4480
89	279,6017	6221,1389	7921	704969	4340	4647
90	282,7433	6361,7251	8100	729000	4868	4814
91	285,8849	6503,8822	8281	753571	5394	4979
92	289,0265	6647,6101	8464	778688	5917	5144
93	292,1681	6792,9087	8649	804357	6437	5307
94	295,3097	6939,7782	8836	830584	6954	5468
95	298,4513	7088,2184	9025	857375	7468	5629
96	301,5929	7238,2295	9216	884736	7980	5789
97	304,7345	7389,8113	9409	912673	8489	5947
98	307,8761	7542,9640	9604	941192	8995	6104
99	311,0177	7697,6874	9801	970299	9,9499	6261
100	314,1593	7853,9816	10000	1000000	10,0000	6416

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
101	317,30	8012	10201	1030301	10,0499	4,6570
102	320,44	8171	10404	1061208	0995	6723
103	323,58	8332	10609	1092727	1489	6875
104	326,73	8495	10816	1124864	1980	7027
105	329,87	8659	11025	1157625	2470	7177
106	333,01	8825	11236	1191016	2956	7326
107	336,15	8992	11449	1225043	3441	7475
108	339,29	9161	11664	1259712	3923	7622
109	342,43	9331	11881	1295029	4403	7769
110	345,58	9503	12100	1331000	4881	7914
111	348,72	9677	12321	1367631	5357	8059
112	351,86	9852	12544	1404928	5830	8203
113	355,00	10029	12769	1442897	6301	8346
114	358,14	10207	12996	1481544	6771	8488
115	361,28	10387	13225	1520875	7238	8629
116	364,42	10568	13456	1560896	7703	8770
117	367,57	10751	13689	1601613	8167	8910
118	370,71	10936	13924	1643032	8628	9049
119	373,85	11122	14161	1685159	9087	9187
120	376,99	11310	14400	1728000	10,9545	9324
121	380,13	11499	14641	1771561	11,0000	9461
122	383,27	11690	14884	1815848	0454	9597
123	386,42	11882	15129	1860867	0905	9732
124	389,56	12076	15376	1906624	1355	4,9866
125	392,70	12272	15625	1953125	1803	5,0000
126	395,84	12469	15876	2000376	2250	0133
127	398,98	12668	16129	2048383	2694	0265
128	402,12	12868	16384	2097152	3137	0397
129	405,27	13070	16641	2146689	3578	0528
130	408,41	13273	16900	2197000	4018	0658
131	411,55	13478	17161	2248091	4455	0788
132	414,69	13685	17424	2299968	4891	0916
133	417,83	13893	17689	2352637	5326	1045
134	420,97	14103	17956	2406104	5758	1172
135	424,12	14314	18225	2460375	6190	1299
136	427,26	14527	18496	2515456	6619	1426
137	430,40	14741	18769	2571353	7047	1551
138	433,54	14957	19044	2628072	7473	1676
139	436,68	15175	19321	2685619	7898	1801
140	439,82	15394	19600	2744000	8322	1925
141	442,96	15615	19881	2803221	8743	2048
142	446,11	15837	20164	2863288	9164	2171
143	449,25	16061	20449	2924207	11,9583	2293
144	452,39	16286	20736	2985984	12,0000	2415
145	455,53	16513	21025	3048625	0416	2536
146	458,67	16742	21316	3112136	0830	2656
147	461,81	16972	21609	3176523	1244	2776
148	464,96	17203	21904	3241792	1655	2896
149	468,10	17437	22201	3307949	2066	3015
150	471,24	17671	22500	3375000	2474	3133

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
151	474,38	17908	22801	3442951	12,2882	5,3251
152	477,52	18146	23104	3511808	3288	3368
153	480,66	18385	23409	3581577	3693	3485
154	483,81	18627	23716	3652264	4097	3601
155	486,95	18869	24025	3723875	4499	3717
156	490,09	19113	24336	3796416	4900	3832
157	493,23	19359	24649	3869893	5300	3947
158	496,37	19607	24964	3944312	5698	4061
159	499,51	19856	25281	4019679	6095	4175
160	502,65	20106	25600	4096000	6491	4288
161	505,80	20358	25921	4173281	6886	4401
162	508,94	20612	26244	4251528	7279	4514
163	512,08	20867	26569	4330747	7671	4626
164	515,22	21124	26896	4410944	8062	4737
165	518,36	21382	27225	4492125	8452	4848
166	521,50	21642	27556	4574296	8841	4959
167	524,65	21904	27889	4657463	9228	5069
168	527,79	22167	28224	4741632	12,9615	5178
169	530,93	22432	28561	4826809	13,0000	5288
170	534,07	22698	28900	4913000	0384	5397
171	537,21	22966	29241	5000211	0767	5505
172	540,35	23235	29584	5088448	1149	5613
173	543,50	23506	29929	5177717	1529	5721
174	546,64	23779	30276	5268024	1909	5828
175	549,78	24053	30625	5359375	2288	5934
176	552,92	24328	30976	5451776	2665	6041
177	556,06	24606	31329	5545233	3041	6147
178	559,20	24885	31684	5639752	3417	6252
179	562,35	25165	32041	5735339	3791	6357
180	565,49	25447	32400	5832000	4164	6462
181	568,63	25730	32761	5929741	4536	6567
182	571,77	26016	33124	6028568	4907	6671
183	574,91	26302	33489	6128487	5277	6774
184	578,05	26590	33856	6229504	5647	6877
185	581,19	26880	34225	6331625	6015	6980
186	584,34	27172	34596	6434856	6382	7083
187	587,48	27465	34969	6539203	6748	7185
188	590,62	27759	35344	6644672	7113	7287
189	593 76	28055	35721	6751269	7477	7388
190	596,90	28353	36100	6859000	7840	7489
191	600,04	28652	36481	6967871	8203	7590
192	603,19	28953	36864	7077888	8564	7690
193	606,33	29255	37249	7189057	8924	7790
194	609,47	29559	37636	7301384	9284	7890
195	612,61	29865	38025	7414875	13,9642	7989
196	615,75	30172	38416	7529536	14,0000	8088
197	618,89	30481	38809	7645373	0357	8186
198	622,04	30791	39204	7762392	0712	8285
199	625,18	31103	39601	7880599	1067	8383
200	628,32	31416	40000	8000000	1421	8480

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
201	631,46	31731	40401	8120601	14,1774	5,8578
202	634,60	32047	40804	8242408	2127	8675
203	637,74	32365	41209	8365427	2478	8771
204	640,88	32685	41616	8489664	2829	8868
205	644,03	33006	42025	8615125	3178	8964
206	647,17	33329	42436	8741816	3527	9059
207	650,31	33654	42849	8869743	3875	9155
208	653,45	33979	43264	8998912	4222	9250
209	656,59	34307	43681	9129329	4568	9345
210	659,73	34636	44100	9261000	4914	9439
211	662,88	34967	44521	9393931	5258	9533
212	666,02	35299	44944	9528128	5602	9627
213	669,16	35633	45369	9663597	5945	9721
214	672,30	35968	45796	9800344	6287	9814
215	675,44	36305	46225	9938375	6629	5,9907
216	678,58	36644	46656	10077696	6969	6,0000
217	681,73	36984	47089	10218313	7309	0092
218	684,87	37325	47524	10360232	7648	0185
219	688,01	37668	47961	10503459	7986	0277
220	691,15	38013	48400	10648000	8324	0368
221	694,29	38360	48841	10793861	8661	0459
222	697,43	38708	49284	10941048	8997	0550
223	700,58	39057	49729	11089567	9332	0641
224	703,72	39408	50176	11239424	14,9666	0732
225	706,86	39761	50625	11390625	15,0000	0822
226	710,00	40115	51076	11543176	0333	0912
227	713,14	40471	51529	11697083	0665	1002
228	716,28	40828	51984	11852352	0997	1091
229	719,42	41187	52441	12008989	1327	1180
230	722,57	41548	52900	12167000	1658	1269
231	725,71	41910	53361	12326391	1987	1358
232	728,85	42273	53824	12487168	2315	1446
233	731,99	42638	54289	12649337	2643	1534
234	735,13	43005	54756	12812904	2971	1622
235	738,27	43374	55225	12977875	3297	1710
236	741,42	43744	55696	13144256	3623	1797
237	744,56	44115	56169	13312053	3948	1885
238	747,70	44488	56644	13481272	4272	1972
239	750,84	44863	57121	13651919	4596	2058
240	753,98	45239	57600	13824000	4919	2145
241	757,12	45617	58081	13997521	5242	2231
242	760,27	45996	58564	14172488	5563	2317
243	763,41	46377	59049	14348907	5885	2403
244	766,55	46759	59536	14526784	6205	2488
245	769,69	47144	60025	14706125	6525	2573
246	772,83	47529	60516	14886936	6844	2658
247	775,97	47916	61009	15069223	7162	2743
248	779,11	48305	61504	15252992	7480	2828
249	782,26	48695	62001	15438249	7797	2912
250	785,40	49087	62500	15625000	8114	2996

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
251	788,54	49481	63001	15813251	15,8430	6,3080
252	791,68	49876	63504	16003008	8745	3164
253	794,82	50273	64009	16194277	9060	3247
254	797,96	50671	64516	16387064	9374	3330
255	801,11	51071	65025	16581375	15,9687	3413
256	804,25	51472	65536	16777216	16,0000	3496
257	807,39	51875	66049	16974593	0312	3579
258	810,53	52279	66564	17173512	0624	3661
259	813,67	52685	67081	17373979	0935	3743
260	816,81	53093	67600	17576000	1245	3825
261	819,96	53502	68121	17779581	1555	3907
262	823,10	53913	68644	17984728	1864	3988
263	826,24	54325	69169	18191447	2173	4070
264	829,38	54739	69696	18399744	2481	4151
265	832,52	55155	70225	18609625	2788	4232
266	835,66	55572	70756	18821096	3095	4312
267	838,81	55990	71289	19034163	3401	4393
268	841,95	56410	71824	19248832	3707	4473
269	845,09	56832	72361	19465109	4012	4553
270	848,23	57256	72900	19683000	4317	4633
271	851,37	57680	73441	19902511	4621	4713
272	854,51	58107	73984	20123648	4924	4792
273	857,65	58535	74529	20346417	5227	4872
274	860,80	58965	75076	20570824	5529	4951
275	863,94	59396	75625	20796875	5831	5030
276	867,08	59828	76176	21024576	6132	5108
277	870,22	60263	76729	21253933	6433	5187
278	873,36	60699	77284	21484952	6733	5265
279	876,50	61136	77841	21717639	7033	5343
280	879,65	61575	78400	21952000	7332	5421
281	882,79	62016	78961	22188041	7631	5499
282	885,93	62458	79524	22425768	7929	5577
283	889,07	62902	80089	22665187	8226	5654
284	892,21	63347	80656	22906304	8523	5731
285	895,35	63794	81225	23149125	8819	5808
286	898,50	64242	81796	23393656	9115	5885
287	901,64	64692	82369	23639903	9411	5962
288	904,78	65144	82944	23887872	16,9706	6039
289	907,92	65597	83521	24137569	17,0000	6115
290	911,06	66052	84100	24389000	0294	6191
291	914,20	66508	84681	24642171	0587	6267
292	917,35	66966	85264	24897088	0880	6343
293	920,49	67426	85849	25153757	1172	6419
294	923,63	67887	86436	25412184	1464	6494
295	926,77	68349	87025	25672375	1756	6569
296	929,91	68813	87616	25934336	2047	6644
297	933,05	69279	88209	26198073	2337	6719
298	936,19	69746	88804	26463592	2627	6794
299	939,34	70215	89401	26730899	2916	6869
300	942,48	70686	90000	27000000	3205	6943

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
301	945,62	71158	90601	27270901	17,3494	6,7018
302	948,76	71631	91204	27543608	3781	7092
303	951,90	72107	91809	27818127	4069	7166
304	955,04	72583	92416	28094464	4356	7240
305	958,19	73062	93025	28372625	4642	7313
306	961,33	73542	93636	28652616	4929	7387
307	964,47	74023	94249	28934443	5214	7460
308	967,61	74506	94864	29218112	5499	7533
309	970,75	74991	95481	29503629	5784	7606
310	973,89	75477	96100	29791000	6068	7679
311	977,04	75964	96721	30080231	6352	7752
312	980,18	76454	97344	30371328	6635	7824
313	983,32	76945	97969	30664297	6918	7897
314	986,46	77437	98596	30959144	7200	7969
315	989,60	77931	99225	31255875	7482	8041
316	992,74	78427	99856	31554496	7764	8113
317	995,88	78924	100489	31855013	8045	8185
318	999,03	79423	101124	32157432	8326	8256
319	1002,17	79923	101761	32461759	8606	8328
320	1005,31	80425	102400	32768000	8885	8399
321	1008,45	80928	103041	33076161	9165	8470
322	1011,59	81433	103684	33386248	9444	8541
323	1014,73	81940	104329	33698267	17,9722	8612
324	1017,88	82448	104976	34012224	18,0000	8683
325	1021,02	82958	105625	34328125	0278	8753
326	1024,16	83469	106276	34645976	0555	8824
327	1027,30	83982	106929	34965783	0831	8894
328	1030,44	84496	107584	35287552	1108	8964
329	1033,58	85012	108241	35611289	1384	9034
330	1036,73	85530	108900	35937000	1659	9104
331	1039,87	86049	109561	36264691	1934	9174
332	1043,01	86570	110224	36594368	2209	9244
333	1046,15	87092	110889	36926037	2483	9313
334	1049,29	87616	111556	37259704	2757	9382
335	1052,43	88141	112225	37595375	3030	9451
336	1055,58	88668	112896	37933056	3303	9521
337	1058,72	89197	113569	38272753	3576	9589
338	1061,86	89727	114244	38614472	3848	9658
339	1065,00	90259	114921	38958219	4120	9727
340	1068,14	90792	115600	39304000	4391	9795
341	1071,28	91327	116281	39651821	4662	9864
342	1074,42	91863	116964	40001688	4932	6,9932
343	1077,57	92401	117649	40353607	5203	7,0000
344	1080,71	92941	118336	40707584	5472	0068
345	1083,85	93482	119025	41063625	5742	0136
346	1086,99	94025	119716	41421736	6011	0203
347	1090,13	94569	120409	41781923	6279	0271
348	1093,27	95115	121104	42144192	6548	0338
349	1096,42	95662	121801	42508549	6815	0406
350	1099,56	96211	122500	42875000	7083	0473

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
351	1102,70	96762	123201	43243551	18,7350	7,0540
352	1105,84	97314	123904	43614208	7617	0607
353	1108,98	97868	124609	43986977	7883	0674
354	1112,12	98423	125316	44361864	8149	0740
355	1115,27	98980	126025	44738875	8414	0807
356	1118,41	99538	126736	45118016	8680	0873
357	1121,55	100098	127449	45499293	8944	0940
358	1124,69	100660	128164	45882712	9209	1006
359	1127,83	101223	128881	46268279	9473	1072
360	1130,97	101788	129600	46656000	18,9737	1138
361	1134,12	102354	130321	47045881	19,0000	1204
362	1137,26	102922	131044	47437928	0263	1269
363	1140,40	103491	131769	47832147	0526	1335
364	1143,54	104062	132496	48228544	0788	1400
365	1146,68	104635	133225	48627125	1050	1466
366	1149,82	105209	133956	49027896	1311	1531
367	1152,97	105784	134689	49430863	1572	1596
368	1156,11	106362	135424	49836032	1833	1661
369	1159,25	106941	136161	50243409	2094	1726
370	1162,39	107521	136900	50653000	2354	1791
371	1165,53	108103	137641	51064811	2614	1855
372	1168,67	108687	138384	51478848	2873	1920
373	1171,81	109272	139129	51895117	3132	1984
374	1174,96	109858	139876	52313624	3391	2048
375	1178,10	110447	140625	52734375	3649	2112
376	1181,24	111036	141376	53157376	3907	2177
377	1184,38	111628	142129	53582633	4165	2240
378	1187,52	112221	142884	54010152	4422	2304
379	1190,66	112815	143641	54439939	4679	2368
380	1193,81	113411	144400	54872000	4936	2432
381	1196,95	114009	145161	55306341	5192	2495
382	1200,09	114608	145924	55742968	5448	2558
383	1203,23	115209	146689	56181887	5704	2622
384	1206,37	115812	147456	56623104	5959	2685
385	1209,51	116416	148225	57066625	6214	2748
386	1212,66	117021	148996	57512456	6469	2811
387	1215,80	117628	149769	57960603	6723	2874
388	1218,94	118237	150544	58411072	6977	2936
389	1222,08	118847	151321	58863869	7231	2999
390	1225,22	119459	152100	59319000	7484	3061
391	1228,36	120072	152881	59776471	7737	3124
392	1231,50	120687	153664	60236288	7990	3186
393	1234,65	121304	154449	60698457	8242	3248
394	1237,79	121922	155236	61162984	8494	3310
395	1240,93	122542	156025	61629875	8746	3372
396	1244,07	123163	156816	62099136	8997	3434
397	1247,21	123786	157609	62570773	9249	3496
398	1250,35	124410	158404	63044792	9499	3558
399	1253,50	125036	159201	63521199	19,9750	3619
400	1256,64	125664	160000	64000000	20,0000	3681

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
401	1259,78	126293	160801	64481201	20,0250	7,3742
402	1262,92	126923	161604	64964808	0499	3803
403	1266,06	127556	162409	65450827	0749	3864
404	1269,20	128190	163216	65939264	0998	3925
405	1272,35	128825	164025	66430125	1246	3986
406	1275,49	129462	164836	66923416	1494	4047
407	1278,63	130100	165649	67419143	1742	4108
408	1281,77	130741	166464	67917312	1990	4169
409	1284,91	131382	167281	68417929	2237	4229
410	1288,05	132025	168100	68921000	2485	4290
411	1291,19	132670	168921	69426531	2731	4350
412	1294,34	133317	169744	69934528	2978	4410
413	1297,48	133965	170569	70444997	3224	4470
414	1300,62	134614	171396	70957944	3470	4530
415	1303,76	135265	172225	71473375	3715	4590
416	1306,91	135918	173056	71991296	3961	4650
417	1310,05	136572	173889	72511713	4206	4710
418	1313,19	137228	174724	73034632	4450	4770
419	1316,33	137885	175561	73560059	4695	4829
420	1319,47	138544	176400	74088000	4939	4889
421	1322,61	139205	177241	74618461	5183	4948
422	1325,75	139867	178084	75151448	5426	5007
423	1328,89	140531	178929	75686967	5670	5067
424	1332,04	141196	179776	76225024	5913	5126
425	1335,18	141863	180625	76765625	6155	5185
426	1338,32	142531	181476	77308776	6398	5244
427	1341,46	143201	182329	77854483	6640	5302
428	1344,60	143872	183184	78402752	6882	5361
429	1347,74	144545	184041	78953589	7123	5420
430	1350,89	145220	184900	79507000	7364	5478
431	1354,03	145896	185761	80062991	7605	5537
432	1357,17	146574	186624	80621568	7846	5595
433	1360,31	147254	187489	81182737	8087	5654
434	1363,45	147934	188356	81746504	8327	5712
435	1366,59	148617	189225	82312875	8567	5770
436	1369,73	149301	190096	82881856	8806	5828
437	1372,88	149987	190969	83453453	9045	5886
438	1376,02	150674	191844	84027672	9284	5944
439	1379,16	151363	192721	84604519	9523	6001
440	1382,30	152053	193600	85184000	20,9762	6059
441	1385,44	152745	194481	85766121	21,0000	6117
442	1388,58	153439	195364	86350888	0238	6174
443	1391,73	154134	196249	86938307	0476	6232
444	1394,87	154830	197136	87528384	0713	6289
445	1398,01	155528	198025	88121125	0950	6346
446	1401,15	156228	198916	88716536	1187	6403
447	1404,29	156930	199809	89314623	1424	6460
448	1407,43	157633	200704	89915392	1660	6517
449	1410,58	158337	201601	90518849	1896	6574
450	1413,72	159043	202500	91125000	2132	6631

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
451	1416,86	159751	203401	91733851	21,2368	7,6688
452	1420,00	160460	204304	92345408	2603	6744
453	1423,14	161171	205209	92959677	2838	6801
454	1426,28	161883	206116	93576664	3073	6857
455	1429,42	162597	207025	94196375	3307	6914
456	1432,57	163313	207936	94818816	3542	6970
457	1435,71	164030	208849	95443993	3776	7026
458	1438,85	164748	209764	96071912	4009	7082
459	1441,99	165468	210681	96702579	4243	7138
460	1445,13	166190	211600	97336000	4476	7194
461	1448,27	166914	212521	97972181	4709	7250
462	1451,42	167639	213444	98611128	4942	7306
463	1454,56	168365	214369	99252847	5174	7362
464	1457,70	169093	215296	99897344	5407	7418
465	1460,84	169823	216225	100544625	5639	7473
466	1463,98	170554	217156	101194696	5870	7529
467	1467,12	171287	218089	101847563	6102	7584
468	1470,27	172021	219024	102503232	6333	7639
469	1473,41	172757	219961	103161709	6564	7695
470	1476,55	173494	220900	103823000	6795	7750
471	1479,69	174234	221841	104487111	7025	7805
472	1482,83	174974	222784	105154048	7256	7860
473	1485,97	175716	223729	105823817	7486	7915
474	1489,12	176460	224676	106496424	7715	7970
475	1492,26	177205	225625	107171875	7945	8025
476	1495,40	177952	226576	107850176	8174	8079
477	1498,54	178701	227529	108531333	8403	8134
478	1501,68	179451	228484	109215352	8632	8188
479	1504,82	180203	229441	109902239	8861	8243
480	1507,96	180956	230400	110592000	9089	8297
481	1511,11	181711	231361	111284641	9317	8352
482	1514,25	182467	232324	111980168	9545	8406
483	1517,39	183225	233289	112678587	21,9773	8460
484	1520,53	183984	234256	113379904	22,0000	8514
485	1523,67	184745	235225	114084125	0227	8568
486	1526,81	185508	236196	114791256	0454	8622
487	1529,96	186272	237169	115501303	0681	8676
488	1533,10	187038	238144	116214272	0907	8730
489	1536,24	187805	239121	116930169	1133	8784
490	1539,38	188574	240100	117649000	1359	8837
491	1542,52	189345	241081	118370771	1585	8891
492	1545,66	190117	242064	119095488	1811	8944
493	1548,81	190890	243049	119823157	2036	8998
494	1551,95	191665	244036	120553784	2261	9051
495	1555,09	192442	245025	121287375	2486	9105
496	1558,23	193221	246016	122023936	2711	9158
497	1561,37	194000	247009	122763473	2935	9211
498	1564,51	194782	248004	123505992	3159	9264
499	1567,65	195565	249001	124251499	3383	9317
500	1570,80	196350	250000	125000000	3607	9370

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
501	1573,94	197136	251001	125751501	22,3830	7,9423
502	1577,08	197923	252004	126506008	4054	9476
503	1580,22	198713	253009	127263527	4277	9528
504	1583,36	199504	254016	128024064	4499	9581
505	1586,50	200296	255025	128787625	4722	9634
506	1589,65	201090	256036	129554216	4944	9686
507	1592,79	201886	257049	130323843	5167	9739
508	1595,93	202683	258064	131096512	5389	9791
509	1599,07	203482	259081	131872229	5610	9843
510	1602,21	204282	260100	132651000	5832	9896
511	1605,35	205084	261121	133432831	6053	7,9948
512	1608,50	205887	262144	134217728	6274	8,0000
513	1611,64	206692	263169	135005697	6495	0052
514	1614,78	207499	264196	135796744	6716	0104
515	1617,92	208307	265225	136590875	6936	0156
516	1621,06	209117	266256	137388096	7156	0208
517	1624,20	209928	267289	138188413	7376	0260
518	1627,35	210741	268324	138991832	7596	0311
519	1630,49	211556	269361	139798359	7816	0363
520	1633,63	212372	270400	140608000	8035	0415
521	1636,77	213189	271441	141420761	8254	0466
522	1639,91	214008	272484	142236648	8473	0517
523	1643,05	214829	273529	143055667	8692	0569
524	1646,20	215651	274576	143877824	8910	0620
525	1649,34	216475	275625	144703125	9129	0671
526	1652,48	217301	276676	145531576	9347	0723
527	1655,62	218128	277729	146363183	9565	0774
528	1658,76	218956	278784	147179952	22,9783	0825
529	1661,90	219787	279841	148035889	23,0000	0876
530	1665,04	220618	280900	148877000	0217	0927
531	1668,19	221452	281961	149721291	0434	0978
532	1671,33	222287	283024	150568768	0651	1028
533	1674,47	223123	284089	151419437	0868	1079
534	1677,61	223961	285156	152273304	1084	1130
535	1680,75	224801	286225	153130375	1301	1180
536	1683,89	225642	287296	153990656	1517	1231
537	1687,04	226484	288369	154854153	1733	1281
538	1690,18	227329	289444	155720872	1948	1332
539	1693,32	228175	290521	156590819	2164	1382
540	1696,46	229022	291600	157464000	2379	1433
541	1699,60	229871	292681	158340421	2594	1483
542	1702,74	230722	293764	159220088	2809	1533
543	1705,88	231574	294849	160103007	3024	1583
544	1709,03	232428	295936	160989184	3238	1633
545	1712,17	233283	297025	161878625	3452	1683
546	1715,31	234140	298116	162771336	3666	1733
547	1718,45	234998	299209	163667323	3880	1783
548	1721,59	235858	300304	164566592	4094	1833
549	1724,73	236720	301401	165469149	4307	1882
550	1727,88	237583	302500	166375000	4521	1932

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
551	1731,02	238448	303601	167284151	23,4734	8,1982
552	1734,16	239314	304704	168196608	4947	2031
553	1737,30	240182	305809	169112377	5160	2081
554	1740,44	241051	306916	170031464	5372	2130
555	1743,58	241922	308025	170953875	5584	2180
556	1746,73	242795	309136	171879616	5797	2229
557	1749,87	243669	310249	172808693	6008	2278
558	1753,01	244545	311364	173741112	6220	2327
559	1756,15	245422	312481	174676879	6432	2377
560	1759,29	246301	313600	175616000	6643	2426
561	1762,43	247181	314721	176558481	6854	2475
562	1765,58	248063	315844	177504328	7065	2524
563	1768,72	248947	316969	178453547	7276	2573
564	1771,86	249832	318096	179406144	7487	2621
565	1775,00	250719	319225	180362125	7697	2670
566	1778,14	251607	320356	181321496	7908	2719
567	1781,28	252497	321489	182284263	8118	2768
568	1784,42	253388	322624	183250432	8328	2816
569	1787,57	254281	323761	184220009	8537	2865
570	1790,71	255176	324900	185193000	8747	2913
571	1793,85	256072	326041	186169411	8956	2962
572	1796,99	256970	327184	187149248	9165	3010
573	1800,13	257869	328329	188132517	9374	3059
574	1803,27	258770	329476	189119224	9583	3107
575	1806,42	259672	330625	190109375	23,9792	3155
576	1809,56	260576	331776	191102976	24,0000	3203
577	1812,70	261482	332929	192100033	0208	3251
578	1815,84	262389	334084	193100552	0416	3300
579	1818,98	263298	335241	194104539	0624	3348
580	1822,12	264208	336400	195112000	0832	3396
581	1825,27	265120	337561	196122941	1039	3443
582	1828,41	266033	338724	197137368	1247	3491
583	1831,55	266948	339889	198155287	1454	3539
584	1834,69	267865	341056	199176704	1661	3587
585	1837,83	268783	342225	200201625	1868	3634
586	1840,97	269703	343396	201230056	2074	3682
587	1844,11	270624	344569	202262003	2281	3730
588	1847,26	271547	345744	203297472	2487	3777
589	1850,40	272471	346921	204336469	2693	3825
590	1853,54	273397	348100	205379000	2899	3872
591	1856,68	274325	349281	206425071	3105	3919
592	1859,82	275254	350464	207474688	3311	3967
593	1862,96	276184	351649	208527857	3516	4014
594	1866,11	277117	352836	209584584	3721	4061
595	1869,25	278051	354025	210644875	3926	4108
596	1872,39	278986	355216	211708736	4131	4155
597	1875,53	279923	356409	212776173	4336	4202
598	1878,67	280862	357604	213847192	4540	4249
599	1881,81	281802	358801	214921799	4745	4296
600	1884,96	282743	360000	216000000	4949	4343

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt{d}$
601	1888,10	283687	361201	217081801	24,5153	8,4390
602	1891,24	284631	362404	218167208	5357	4437
603	1894,38	285578	363609	219256227	5561	4484
604	1897,52	286526	364816	220348864	5764	4530
605	1900,66	287475	366025	221445125	5967	4577
606	1903,81	288426	367236	222545016	6171	4623
607	1906,95	289379	368449	223648543	6374	4670
608	1910,09	290333	369664	224755712	6577	4716
609	1913,23	291289	370881	225866529	6779	4763
610	1916,37	292247	372100	226981000	6982	4809
611	1919,51	293206	373321	228099131	7184	4856
612	1922,65	294166	374544	229220928	7386	4902
613	1925,80	295128	375769	230346397	7588	4948
614	1928,94	296092	376996	231475544	7790	4994
615	1932,08	297057	378225	232608375	7992	5040
616	1935,22	298024	379456	233744896	8193	5086
617	1938,36	298992	380689	234885113	8395	5132
618	1941,50	299962	381924	236029032	8596	5178
619	1944,65	300934	383161	237176659	8797	5224
620	1947,79	301907	384400	238328000	8998	5270
621	1950,93	302882	385641	239483061	9199	5316
622	1954,07	303858	386884	240641848	9399	5362
623	1957,21	304836	388129	241804367	9600	5408
624	1960,35	305815	389376	242970624	24,9800	5453
625	1963,50	306796	390625	244140625	25,0000	5499
626	1966,64	307779	391876	245314376	0200	5544
627	1969,78	308763	393129	246491883	0400	5590
628	1972,92	309748	394384	247673152	0599	5635
629	1976,06	310736	395641	248858189	0799	5681
630	1979,20	311725	396900	250047000	0998	5726
631	1982,35	312715	398161	251239591	1197	5772
632	1985,49	313707	399424	252435968	1396	5817
633	1988,63	314700	400689	253636137	1595	5862
634	1991,77	315696	401956	254840104	1794	5907
635	1994,91	316692	403225	256047875	1992	5952
636	1998,05	317690	404496	257259456	2190	5997
637	2001,19	318690	405769	258474853	2389	6043
638	2004,34	319692	407044	259694072	2587	6088
639	2007,48	320695	408321	260917119	2784	6132
640	2010,62	321699	409600	262144000	2982	6177
641	2013,76	322705	410881	263374721	3180	6222
642	2016,90	323713	412164	264609288	3377	6267
643	2020,04	324722	413449	265847707	3574	6312
644	2023,19	325733	414736	267089984	3772	6357
645	2026,33	326745	416025	268336125	3969	6401
646	2029,47	327759	417316	269586136	4165	6446
647	2032,61	328775	418609	270840023	4362	6490
648	2035,75	329792	419904	272097792	4558	6535
649	2038,89	330810	421201	273359449	4755	6579
650	2042,04	331831	422500	274625000	4951	6624

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
651	2045,18	332853	423801	275894451	25,5147	8,6668
652	2048,32	333876	425104	277167808	5343	6713
653	2051,46	334901	426409	278445077	5539	6757
654	2054,60	335927	427716	279726264	5734	6801
655	2057,74	336955	429025	281011375	5930	6845
656	2060,88	337985	430336	282300416	6125	6890
657	2064,03	339016	431649	283593393	6320	6934
658	2067,17	340049	432964	284890312	6515	6978
659	2070,31	341083	434281	286191179	6710	7022
660	2073,45	342119	435600	287496000	6905	7066
661	2076,59	343157	436921	288804781	7099	7110
662	2079,73	344196	438244	290117528	7294	7154
663	2082,88	345237	439569	291434247	7488	7198
664	2086,02	346279	440896	292754944	7682	7241
665	2089,16	347323	442225	294079625	7876	7285
666	2092,30	348368	443556	295408296	8070	7329
667	2095,44	349415	444889	296740963	8263	7373
668	2098,58	350464	446224	298077632	8457	7416
669	2101,73	351514	447561	299418309	8650	7460
670	2104,87	352565	448900	300763000	8844	7503
671	2108,01	353618	450241	302111711	9037	7547
672	2111,15	354673	451584	303464448	9230	7590
673	2114,29	355730	452929	304821217	9422	7634
674	2117,43	356788	454276	306182024	9615	7677
675	2120,58	357847	455625	307546875	25,9808	7721
676	2123,72	358908	456976	308915776	26,0000	7764
677	2126,86	359971	458329	310288733	0192	7807
678	2130,00	361035	459684	311665752	0384	7850
679	2133,14	362101	461041	313046839	0576	7893
680	2136,28	363168	462400	314432000	0768	7937
681	2139,42	364237	463761	315821241	0960	7980
682	2142,57	365308	465124	317214568	1151	8023
683	2145,71	366380	466489	318611987	1343	8066
684	2148,85	367453	467856	320013504	1534	8109
685	2151,99	368528	469225	321419125	1725	8152
686	2155,13	369605	470596	322828856	1916	8194
687	2158,27	370684	471969	324242703	2107	8237
688	2161,42	371764	473344	325660672	2298	8280
689	2164,56	372845	474721	327082769	2488	8323
690	2167,70	373928	476100	328509000	2679	8366
691	2170,84	375013	477481	329939371	2869	8408
692	2173,98	376099	478864	331373888	3059	8451
693	2177,12	377187	480249	332812557	3249	8493
694	2180,27	378276	481636	334255384	3439	8536
695	2183,41	379367	483025	335702375	3629	8578
696	2186,55	380459	484416	337153536	3818	8621
697	2189,69	381553	485809	338608873	4008	8663
698	2192,83	382649	487204	340068392	4197	8706
699	2195,97	383746	488601	341532099	4386	8748
700	2199,11	384845	490000	343000000	4575	8790

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
701	2202,26	385945	491401	344472101	26,4764	8,8833
702	2205,40	387047	492804	345948408	4953	8875
703	2208,54	388151	494209	347428927	5141	8917
704	2211,68	389256	495616	348913664	5330	8959
705	2214,82	390363	497025	350402625	5518	9001
706	2217,96	391471	498436	351895816	5707	9043
707	2221,11	392580	499849	353393243	5895	9085
708	2224,25	393692	501264	354894912	6083	9127
709	2227,39	394805	502681	356400829	6271	9169
710	2230,53	395919	504100	357911000	6458	9211
711	2233,67	397035	505521	359425431	6646	9253
712	2236,81	398153	506944	360944128	6833	9295
713	2239,96	399272	508369	362467097	7021	9337
714	2243,10	400393	509796	363994344	7208	9378
715	2246,24	401515	511225	365525875	7395	9420
716	2249,38	402639	512656	367061696	7582	9462
717	2252,52	403765	514089	368601813	7769	9503
718	2255,66	404892	515524	370146232	7955	9545
719	2258,81	406020	516961	371694959	8142	9587
720	2261,95	407150	518400	373248000	8328	9628
721	2265,09	408282	519841	374805361	8514	9670
722	2268,23	409416	521284	376367048	8701	9711
723	2271,37	410550	522729	377933067	8887	9752
724	2274,51	411687	524176	379503424	9072	9794
725	2277,65	412825	525625	381078125	9258	9835
726	2280,80	413965	527076	382657176	9444	9876
727	2283,94	415106	528529	384240583	9629	9918
728	2287,08	416248	529984	385828352	26,9815	8,9959
729	2290,22	417393	531441	387420489	27,0000	9,0000
730	2293,36	418539	532900	389017000	0185	0041
731	2296,50	419686	534361	390617891	0370	0082
732	2299,65	420835	535824	392223168	0555	0123
733	2302,79	421986	537289	393832837	0740	0164
734	2305,93	423138	538756	395446904	0924	0205
735	2309,07	424292	540225	397065375	1109	0246
736	2312,21	425447	541696	398688256	1293	0287
737	2315,35	426604	543169	400315553	1477	0328
738	2318,50	427762	544644	401947272	1662	0369
739	2321,64	428922	546121	403583419	1846	0410
740	2324,78	430084	547600	405224000	2029	0450
741	2327,92	431247	549081	406869021	2213	0491
742	2331,06	432412	550564	408518488	2397	0532
743	2334,20	433578	552049	410172407	2580	0572
744	2337,34	434746	553536	411830784	2764	0613
745	2340,49	435916	555025	413493625	2947	0654
746	2343,63	437087	556516	415160936	3130	0694
747	2346,77	438259	558009	416832723	3313	0735
748	2349,91	439433	559504	418508992	3496	0775
749	2353,05	440609	561001	420189749	3679	0816
750	2356,19	441786	562500	421875000	3861	0856

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
751	2359,34	442965	564001	423564751	27,4044	9,0896
752	2362,48	444146	565504	425259008	4226	0937
753	2365,62	445328	567009	426957777	4408	0977
754	2368,76	446511	568516	428661064	4591	1017
755	2371,90	447697	570025	430368875	4773	1057
756	2375,04	448883	571536	432081216	4955	1098
757	2378,19	450072	573049	433798093	5136	1138
758	2381,33	451262	574564	435519512	5318	1178
759	2384,47	452453	576081	437245479	5500	1218
760	2387,61	453646	577600	438976000	5681	1258
761	2390,75	454841	579121	440711081	5862	1298
762	2393,89	456037	580644	442450728	6043	1338
763	2397,04	457234	582169	444194947	6225	1378
764	2400,18	458434	583696	445943744	6405	1418
765	2403,32	459635	585225	447697125	6586	1458
766	2406,46	460837	586756	449455096	6767	1498
767	2409,60	462041	588289	451217663	6948	1537
768	2412,74	463247	589824	452984832	7128	1577
769	2415,88	464454	591361	454756609	7308	1617
770	2419,03	465663	592900	456533000	7489	1657
771	2422,17	466873	594441	458314011	7669	1696
772	2425,31	468085	595984	460099648	7849	1736
773	2428,45	469298	597529	461889917	8029	1775
774	2431,59	470513	599076	463684824	8209	1815
775	2434,73	471730	600625	465484375	8388	1855
776	2437,88	472948	602176	467288576	8568	1894
777	2441,02	474168	603729	469097433	8747	1933
778	2444,16	475389	605284	470910952	8927	1973
779	2447,30	476612	606841	472729139	9106	2012
780	2450,44	477836	608400	474552000	9285	2052
781	2453,58	479062	609961	476379541	9464	2091
782	2456,73	480290	611524	478211768	9643	2130
783	2459,87	481519	613089	480048687	27,9821	2170
784	2463,01	482750	614656	481890304	28,0000	2209
785	2466,15	483982	616225	483736625	0179	2248
786	2469,29	485216	617796	485587656	0357	2287
787	2472,43	486451	619369	487443403	0535	2326
788	2475,58	487688	620944	489303872	0713	2365
789	2478,72	488927	622521	491169069	0891	2404
790	2481,86	490167	624100	493039000	1069	2443
791	2485,00	491409	625681	494913671	1247	2482
792	2488,14	492652	627264	496793088	1425	2521
793	2491,28	493897	628849	498677257	1603	2560
794	2494,42	495143	630436	500566184	1780	2599
795	2497,57	496391	632025	502459875	1957	2638
796	2500,71	497641	633616	504358336	2135	2677
797	2503,85	498892	635209	506261573	2312	2716
798	2506,99	500145	636804	508169592	2489	2754
799	2510,13	501399	638401	510082399	2666	2793
800	2513,27	502655	640000	512000000	2843	2832

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
801	2516,42	503912	641601	513922401	28,3019	9,2870
802	2519,56	505171	643204	515849608	3196	2909
803	2522,70	506432	644809	517781627	3373	2948
804	2525,84	507694	646416	519718464	3549	2986
805	2528,98	508958	648025	521660125	3725	3025
806	2532,12	510223	649636	523606616	3901	3063
807	2535,27	511490	651249	525557943	4077	3102
808	2538,41	512758	652864	527514112	4253	3140
809	2541,55	514028	654481	529475129	4429	3179
810	2544,69	515300	656100	531441000	4605	3217
811	2547,83	516573	657721	533411731	4781	3255
812	2550,97	517848	659344	535387328	4956	3294
813	2554,11	519124	660969	537367797	5132	3332
814	2557,26	520402	662596	539353144	5307	3370
815	2560,40	521681	664225	541343375	5482	3408
816	2563,54	522962	665856	543338496	5657	3447
817	2566,68	524245	667489	545338513	5832	3485
818	2569,82	525529	669124	547343432	6007	3523
819	2572,96	526814	670761	549353259	6182	3561
820	2576,11	528102	672400	551368000	6356	3599
821	2579,25	529391	674041	553387661	6531	3637
822	2582,39	530681	675684	555412248	6705	3675
823	2585,53	531973	677329	557441767	6880	3713
824	2588,67	533267	678976	559476224	7054	3751
825	2591,81	534562	680625	561515625	7228	3789
826	2594,96	535858	682276	563559976	7402	3827
827	2598,10	537157	683929	565609283	7576	3865
828	2601,24	538456	685584	567663552	7750	3902
829	2604,38	539758	687241	569722789	7924	3940
830	2607,52	541061	688900	571787000	8097	3978
831	2610,66	542365	690561	573856191	8271	4016
832	2613,81	543671	692224	575930368	8444	4053
833	2616,95	544979	693889	578009537	8617	4091
834	2620,09	546288	695556	580093704	8791	4129
835	2623,23	547599	697225	582182875	8964	4166
836	2626,37	548912	698896	584277056	9137	4204
837	2629,51	550226	700569	586376253	9310	4241
838	2632,65	551541	702244	588480472	9482	4279
839	2635,80	552858	703921	590589719	9655	4316
840	2638,94	554177	705600	592704000	28,9828	4354
841	2642,08	555497	707281	594823321	29,0000	4391
842	2645,22	556819	708964	596947688	0172	4429
843	2648,36	558142	710649	599077107	0345	4466
844	2651,51	559467	712336	601211584	0517	4503
845	2654,65	560794	714025	603351125	0689	4541
846	2657,79	562122	715716	605495736	0861	4578
847	2660,93	563452	717409	607645423	1033	4615
848	2664,07	564783	719104	609800192	1204	4652
849	2667,21	566116	720801	611960049	1376	4690
850	2670,35	567450	722500	614125000	1548	4727

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
851	2673,50	568786	724201	616295051	29,1719	94764
852	2676,64	570124	725904	618470208	1890	4801
853	2679,78	571463	727609	620650477	2062	4838
854	2682,92	572803	729316	622835864	2233	4875
855	2686,06	574146	731025	625026375	2404	4912
856	2689,20	575490	732736	627222016	2575	4949
857	2692,34	576835	734449	629422793	2746	4986
858	2695,49	578182	736164	631628712	2916	5023
859	2698,63	579530	737881	633839779	3087	5060
860	2701,77	580880	739600	636056000	3258	5097
861	2704,91	582232	741321	638277381	3428	5134
862	2708,05	583585	743044	640503928	3598	5171
863	2711,19	584940	744769	642735647	3769	5207
864	2714,34	586297	746496	644972544	3939	5244
865	2717,48	587655	748225	647214625	4109	5281
866	2720,62	589014	749956	649461896	4279	5317
867	2723,76	590375	751689	651714363	4449	5354
868	2726,90	591738	753424	653972032	4618	5391
869	2730,04	593102	755161	656234909	4788	5427
870	2733,19	594468	756900	658503000	4958	5464
871	2736,33	595835	758641	660776311	5127	5501
872	2739,47	597204	760384	663054848	5296	5537
873	2742,61	598575	762129	665338617	5466	5574
874	2745,75	599947	763876	667627624	5635	5610
875	2748,89	601320	765625	669921875	5804	5647
876	2752,04	602696	767376	672221376	5973	5683
877	2755,18	604073	769129	674526133	6142	5719
878	2758,32	605451	770884	676836152	6311	5756
879	2761,46	606831	772641	679151439	6479	5792
880	2764,60	608212	774400	681472000	6648	5828
881	2767,74	609595	776161	683797841	6816	5865
882	2770,88	610980	777924	686128968	6985	5901
883	2774,03	612366	779689	688465387	7153	5937
884	2777,17	613754	781456	690807104	7321	5973
885	2780,31	615143	783225	693154125	7489	6010
886	2783,45	616534	784996	695506456	7658	6046
887	2786,59	617927	786769	697864103	7825	6082
888	2789,73	619321	788544	700227072	7993	6118
889	2792,88	620717	790321	702595369	8161	6154
890	2796,02	622114	792100	704969000	8329	6190
891	2799,16	623513	793881	707347971	8496	6226
892	2802,30	624913	795664	709732288	8664	6262
893	2805,44	626315	797449	712121957	8831	6298
894	2808,58	627718	799236	714516984	8998	6334
895	2811,73	629124	801025	716917375	9166	6370
896	2814,87	630530	802816	719323136	9333	6406
897	2818,01	631938	804609	721734273	9500	6442
898	2821,15	633348	806404	724150792	9666	6477
899	2824,29	634760	808201	726572699	29,9833	6513
900	2827,43	636173	810000	729000000	30,0000	6549

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
901	2830,58	637587	811801	731432701	30,0167	9,6585
902	2833,72	639003	813604	733870808	0333	6620
903	2836,86	640421	815409	736314327	0500	6656
904	2840,00	641840	817216	738763264	0666	6692
905	2843,14	643261	819025	741217625	0832	6727
906	2846,28	644683	820836	743677416	0998	6763
907	2849,42	646107	822649	746142643	1164	6799
908	2852,57	647533	824464	748613312	1330	6834
909	2855,71	648960	826281	751089429	1496	6870
910	2858,85	650388	828100	753571000	1662	6905
911	2861,99	651818	829921	756058031	1828	6941
912	2865,13	653250	831744	758550528	1993	6976
913	2868,27	654684	833569	761048497	2159	7012
914	2871,42	656118	835396	763551944	2324	7047
915	2874,56	657555	837225	766060875	2490	7082
916	2877,70	658993	839056	768575296	2655	7118
917	2880,84	660433	840889	771095213	2820	7153
918	2883,98	661874	842724	773620632	2985	7188
919	2887,12	663317	844561	776151559	3150	7224
920	2890,27	664761	846400	778688000	3315	7259
921	2893,41	666207	848241	781229961	3480	7294
922	2896,55	667654	850084	783777448	3645	7329
923	2899,69	669103	851929	786330467	3809	7364
924	2902,83	670554	853776	788889024	3974	7400
925	2905,97	672006	855625	791453125	4138	7435
926	2909,11	673460	857476	794022776	4302	7470
927	2912,26	674915	859329	796597983	4467	7505
928	2915,40	676372	861184	799178752	4631	7540
929	2918,54	677831	863041	801765089	4795	7575
930	2921,68	679291	864900	804357000	4959	7610
931	2924,82	680752	866761	806954491	5123	7645
932	2927,96	682216	868624	809557568	5287	7680
933	2931,11	683680	870489	812166237	5450	7715
934	2934,25	685147	872356	814780504	5614	7750
935	2937,39	686615	874225	817400375	5778	7785
936	2940,53	688084	876096	820025856	5941	7819
937	2943,67	689555	877969	822656953	6105	7854
938	2946,81	691028	879844	825293672	6268	7889
939	2949,96	692502	881721	827936019	6431	7924
940	2953,10	693978	883600	830584000	6594	7959
941	2956,24	695455	885481	833237621	6757	7993
942	2959,38	696934	887364	835896888	6920	8028
943	2962,52	698415	889249	838561807	7083	8063
944	2965,66	699897	891136	841232384	7246	8097
945	2968,81	701380	893025	843908625	7409	8132
946	2971,95	702865	894916	846590536	7571	8167
947	2975,09	704352	896809	849278123	7734	8201
948	2978,23	705840	898704	851971392	7896	8236
949	2981,37	707330	900601	854670349	8058	8270
950	2984,51	708822	902500	857375000	8221	8305

d	$d\pi$	$\frac{1}{4}d^2\pi$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
951	2987,65	710315	904401	860085351	30,8383	9,8339
952	2990,80	711810	906304	862801408	8545	8374
953	2993,94	713307	908209	865523177	8707	8408
954	2997,08	714803	910116	868250664	8869	8443
955	3000,22	716303	912025	870983875	9031	8477
956	3003,36	717804	913936	873722816	9192	8511
957	3006,50	719306	915849	876467493	9354	8546
958	3009,65	720810	917764	879217912	9516	8580
959	3012,79	722316	919681	881974079	9677	8614
960	3015,93	723823	921600	884736000	30,9839	8648
961	3019,07	725332	923521	887503681	31,0000	8683
962	3022,21	726842	925444	890277128	0161	8717
963	3025,35	728354	927369	893056347	0322	8751
964	3028,50	729867	929296	895841344	0483	8785
965	3031,64	731382	931225	898632125	0644	8819
966	3034,78	732899	933156	901428696	0805	8854
967	3037,92	734417	935089	904231063	0966	8888
968	3041,06	735937	937024	907039232	1127	8922
969	3044,20	737458	938961	909853209	1288	8956
970	3047,34	738981	940900	912673000	1448	8990
971	3050,49	740506	942841	915498611	1609	9024
972	3053,63	742032	944784	918330048	1769	9058
973	3056,77	743559	946729	921167317	1929	9092
974	3059,91	745088	948676	924010424	2090	9126
975	3063,05	746619	950625	926859375	2250	9160
976	3066,19	748151	952576	929714176	2410	9194
977	3069,34	749685	954529	932574833	2570	9227
978	3072,48	751221	956484	935441352	2730	9261
979	3075,62	752758	958441	938313739	2890	9295
980	3078,76	754296	960400	941192000	3050	9329
981	3081,90	755837	962361	944076141	3209	9363
982	3085,04	757378	964324	946966168	3369	9396
983	3088,19	758922	966289	949862087	3528	9430
984	3091,33	760466	968256	952763904	3688	9464
985	3094,47	762013	970225	955671625	3847	9497
986	3097,61	763561	972196	958585256	4006	9531
987	3100,75	765111	974169	961504803	4166	9565
988	3103,89	766662	976144	964430272	4325	9598
989	3107,04	768214	978121	967361669	4484	9632
990	3110,18	769769	980100	970299000	4643	9666
991	3113,32	771325	982081	973242271	4802	9699
992	3116,46	772882	984064	976191488	4960	9733
993	3119,60	774441	986049	979146657	5119	9766
994	3122,74	776002	988036	982107784	5278	9800
995	3125,88	777564	990025	985074875	5436	9833
996	3129,03	779128	992016	988047936	5595	9866
997	3132,17	780693	994009	991026973	5753	9900
998	3135,31	782260	996004	994011992	5911	9933
999	3138,45	783828	998001	997002999	6070	9,9967
1000	3141,59	785398	1000000	1000000000	31,6228	10,0000

Tabelle für $F\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ und $E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$. $\varepsilon = \sin \alpha$.

α Grad	F	E	α Grad	F	E	α Grad	F	E	α Grad	F	E
0	1,5708	1,5708	23	1,6365	1,5090	46	1,8691	1,3418	69	2,4610	1,1272
0,5	5708	5708	23,5	6395	5064	46,5	8769	3373	69,5	4825	1228
1	5709	5707	24	6426	5037	47	8848	3329	70	5046	1184
1,5	5711	5705	24,5	6458	5009	47,5	8929	3284	70,5	5273	1140
2	5713	5703	25	6490	4981	48	9011	3238	71	5507	1096
2,5	5715	5700	25,5	6523	4953	48,5	9095	3193	71,5	5749	1053
3	5719	5697	26	6557	4924	49	9180	3147	72	5998	1011
3,5	5723	5693	26,5	6592	4894	49,5	9267	3101	72,5	6256	0968
4	5727	5689	27	6627	4864	50	9356	3055	73	6521	0927
4,5	5732	5684	27,5	6663	4834	50,5	9446	3009	73,5	6796	0885
5	5738	5678	28	6701	4803	51	9539	2963	74	7081	0844
5,5	5744	5672	28,5	6739	4772	51,5	9633	2916	74,5	7375	0804
6	5751	5665	29	6777	4740	52	9729	2870	75	7681	0764
6,5	5759	5658	29,5	6817	4707	52,5	9827	2823	75,5	7998	0725
7	5767	5649	30	6858	4675	53	1,9927	2776	76	8327	0686
7,5	5776	5641	30,5	6899	4641	53,5	2,0029	2729	76,5	8669	0648
8	5785	5632	31	6941	4608	54	0133	2681	77	9026	0611
8,5	5795	5622	31,5	6984	4574	54,5	0239	2634	77,5	9397	0574
9	5805	5611	32	7028	4539	55	0347	2587	78	2,9786	0538
9,5	5817	5600	32,5	7073	4504	55,5	0458	2539	78,5	3,0192	0502
10	5828	5589	33	7119	4469	56	0571	2492	79	0617	0468
10,5	5841	5577	33,5	7166	4433	56,5	0686	2444	79,5	1064	0434
11	5854	5564	34	7214	4397	57	0804	2397	80	1534	0401
11,5	5868	5551	34,5	7263	4360	57,5	0924	2349	80,5	2029	0369
12	5882	5537	35	7312	4323	58	1047	2301	81	2553	0338
12,5	5897	5522	35,5	7363	4285	58,5	1172	2254	81,5	3108	0308
13	5913	5507	36	7415	4248	59	1300	2206	82	3699	0278
13,5	5929	5492	36,5	7468	4209	59,5	1431	2158	82,5	4329	0250
14	5946	5476	37	7522	4171	60	1565	2111	83	5004	0223
14,5	5963	5459	37,5	7577	4132	60,5	1702	2063	83,5	5731	0197
15	5981	5442	38	7633	4092	61	1842	2015	84	6519	0172
15,5	6000	5424	38,5	7690	4053	61,5	1985	1968	84,5	7376	0149
16	6020	5405	39	7748	4013	62	2132	1920	85	8317	0127
16,5	6040	5386	39,5	7807	3972	62,5	2282	1873	85,5	3,9360	0106
17	6061	5367	40	7868	3931	63	2435	1826	86	4,0528	0086
17,5	6082	5347	40,5	7929	3890	63,5	2593	1779	86,5	1854	0069
18	6105	5326	41	7992	3849	64	2754	1732	87	3387	0053
18,5	6127	5305	41,5	8056	3807	64,5	2919	1685	87,5	5202	0038
19	6151	5283	42	8122	3765	65	3088	1638	88	4,7427	0026
19,5	6175	5261	42,5	8188	3723	65,5	3261	1592	88,5	5,0299	0016
20	6200	5238	43	8256	3680	66	3439	1545	89	5,4349	0008
20,5	6226	5215	43,5	8325	3637	66,5	3623	1499	89,5	6,1278	0002
21	6252	5191	44	8396	3594	67	3809	1453	89,6	3509	0001
21,5	6279	5166	44,5	8468	3550	67,5	4001	1408	89,7	6,6385	0001
22	6307	5141	45	8541	3506	68	4198	1362	89,8	7,0440	0000
22,5	6336	5116	45,5	8615	3462	68,5	4401	1317	89,9	7,7371	0000
23	6365	5090	46	8691	3418	69	4610	1272	90	∞	0000

Tabelle für $F(\varepsilon, \varphi)$

α \ φ	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
0^0	0	0,1745	0,3491	0,5236	0,6981	0,8727	1,0472	1,2217	1,3963	1,5708
10^0	0	0,1746	0,3493	0,5243	0,6997	0,8756	1,0519	1,2286	1,4056	1,5828
20^0	0	0,1746	0,3499	0,5263	0,7043	0,8842	1,0660	1,2495	1,4344	1,6200
30^0	0	0,1748	0,3508	0,5294	0,7116	0,8982	1,0896	1,2853	1,4846	1,6858
40^0	0	0,1749	0,3519	0,5334	0,7213	0,9173	1,1226	1,3372	1,5597	1,7868
50^0	0	0,1751	0,3533	0,5379	0,7323	0,9401	1,1643	1,4068	1,6660	1,9356
60^0	0	0,1752	0,3545	0,5422	0,7436	0,9647	1,2125	1,4944	1,8125	2,1565
70^0	0	0,1753	0,3555	0,5459	0,7535	0,9876	1,2619	1,5959	2,0119	2,5046
80^0	0	0,1754	0,3561	0,5484	0,7604	1,0044	1,3014	1,6918	2,2653	3,1534
90^0	0	0,1754	0,3564	0,5493	0,7629	1,0107	1,3170	1,7354	2,4362	∞

Tabelle für $E(\varepsilon, \varphi)$.

ε	φ									
	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
0^0	0	0,1745	0,3491	0,5236	0,6981	0,8727	1,0472	1,2217	1,3963	1,5708
10^0	0	0,1745	0,3489	0,5229	0,6966	0,8698	1,0426	1,2149	1,3870	1,5589
20^0	0	0,1744	0,3483	0,5209	0,6921	0,8614	1,0290	1,1949	1,3597	1,5238
30^0	0	0,1743	0,3473	0,5179	0,6851	0,8483	1,0076	1,1632	1,3161	1,4675
40^0	0	0,1742	0,3462	0,5141	0,6763	0,8317	0,9801	1,1221	1,2590	1,3931
50^0	0	0,1740	0,3450	0,5100	0,6667	0,8134	0,9493	1,0750	1,1926	1,3055
60^0	0	0,1739	0,3438	0,5061	0,6575	0,7954	0,9184	1,0266	1,1225	1,2111
70^0	0	0,1738	0,3429	0,5029	0,6497	0,7801	0,8914	0,9930	1,0565	1,1184
80^0	0	0,1737	0,3422	0,5007	0,6446	0,7697	0,8728	0,9514	1,0054	1,0401
90^0	0	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428	0,7660	0,8660	0,9100	0,9848	1,0000

Mittlere Zeit im wahren Mittage 12 Uhr + oder — der Minuten der Tabelle.

Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
1	+4′	+14′	+13′	+4′	−3′	−3′	+3′	+6′	+0′	−10′	−16′	−11′
2	4	14	12	4	3	3	3	6	−0	11	16	10
3	5	14	12	3	3	2	4	6	1	11	16	10
4	5	14	12	3	3	2	4	6	1	11	16	10
5	6	14	12	3	3	2	4	6	1	11	16	9
6	6	14	12	3	4	2	4	6	2	12	16	9
7	7	14	11	2	4	2	4	5	2	12	16	8
8	7	15	11	2	4	1	5	5	2	12	16	8
9	7	15	11	2	4	1	5	5	3	13	16	8
10	8	15	11	1	4	1	5	5	3	13	16	7
11	8	15	10	1	4	1	5	5	3	13	16	7
12	9	15	10	1	4	1	5	5	4	13	16	6
13	9	15	10	1	4	1	5	5	4	14	16	6
14	9	15	10	0	4	0	5	4	4	14	15	5
15	10	14	9	+0	4	−0	5	4	5	14	15	5
16	10	14	9	−0	4	+0	6	4	5	14	15	4
17	10	14	9	0	4	0	6	4	5	14	15	4
18	11	14	8	1	4	1	6	4	6	15	15	3
19	11	14	8	1	4	1	6	3	6	15	14	3
20	11	14	8	1	4	1	6	3	6	15	14	2
21	12	14	7	1	4	1	6	3	7	15	14	2
22	12	14	7	2	4	1	6	3	7	15	14	1
23	12	14	7	2	4	2	6	3	8	15	14	1
24	12	14	7	2	4	2	6	2	8	16	13	− 0
25	13	13	6	2	3	2	6	2	8	16	13	+ 0
26	13	13	6	2	3	2	6	2	9	16	13	1
27	13	13	6	2	3	2	6	1	9	16	12	1
28	13	13	5	3	3	3	6	1	9	16	12	2
29	13	13	5	3	3	3	6	1	10	16	12	2
30	14		5	3	3	3	6	1	10	16	11	3
31	14		4		3		6	0		16		3

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
3	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
10	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
20	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0
21	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
30	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0	27,0
31	3,1	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6	21,7	24,8	27,9
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
40	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0
41	4,1	8,2	12,3	16,4	20,5	24,6	28,7	32,8	36,9
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
50	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6	35,7	40,8	45,9
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
60	6,0	12,0	18,0	24,0	30,0	36,0	42,0	48,0	54,0
61	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5	36,6	42,7	48,8	54,9
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
63	6,3	12,6	08,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5
66	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4
67	6,7	13,4	20,1	26,8	33,5	40,2	46,9	53,6	60,3
68	6,8	13,6	20,4	27,2	34,0	40,8	47,6	54,4	61,2
69	6,9	13,8	20,7	27,6	34,5	41,4	48,3	55,2	62,1
70	7,0	14,0	21,0	28,0	35,0	42,0	49,0	56,0	63,0
71	7,1	14,2	21,3	28,4	35,5	42,6	49,7	56,8	63,9
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8
73	7,3	14,6	21,9	29,2	36,5	43,8	51,1	58,4	65,7
74	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6
75	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0	52,5	60,0	67,5
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4
77	7,7	15,4	23,1	30,8	38,5	46,2	53,9	61,6	69,3
78	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
80	8,0	16,0	24,0	32,0	40,0	48,0	56,0	64,0	72,0
81	8,1	16,2	24,3	32,4	40,5	48,6	56,7	64,8	72,9
82	8,2	16,4	24,6	32,8	41,0	49,2	57,4	65,6	73,8
83	8,3	16,6	24,9	33,2	41,5	49,8	58,1	66,4	74,7
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6
85	8,5	17,0	25,5	34,0	42,5	51,0	59,5	68,0	76,5
86	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,6	60,2	68,8	77,4
87	8,7	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2
89	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1
90	9,0	18,0	27,0	36,0	45,0	54,0	63,0	72,0	81,0
91	9,1	18,2	27,3	36,4	45,5	54,6	63,7	72,8	81,9
92	9,2	18,4	27,6	36,8	46,0	55,2	64,4	73,6	82,8
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5
96	9,6	19,2	28,8	38,4	48,0	57,6	67,2	76,8	86,4
97	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	87,3
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
100	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0

Ortstafel. (Sternwarten.)

Ort	Breite	Länge v. Ferro
Altona	53° 32′ 45 N	27° 36′ 18″ O
Berlin	52 30 17 „	31 3 30 „
Bonn	50 43 45 „	24 45 45 „
Breslau	51 6 56 „	34 42 8 „
Brüssel	50 51 11 „	22 1 53 „
Cambridge Engl.	52 12 52 „	17 45 27 „
Cambridge N.-A.	42 22 49 „	53 27 23 W
Christiania	59 54 44 „	28 23 20 O
Copenhagen	55 40 53 „	30 14 35 „
Danzig	54 21 18 „	36 20 53 „
Edinburgh	55 57 23 „	14 28 52 „
Göttingen	51 31 48 „	27 36 18 „
Greenwich	51 28 38 „	17 39 46 „
Helsingfors	60 9 42 „	42 37 30 „
Kasan	55 47 23 „	66 47 45 „
Königsberg	54 42 51 „	38 9 30 „
London	51 31 36 „	17 36 30 „
Madras	13 4 9 „	97 54 1 „
Moskau	55 45 26 „	55 14 1 „
Neapel	40 51 47 „	31 54 51 „
Nikolajew	46 58 21 „	49 38 18 „
Palermo	38 6 44 „	31 1 10 „
Paramatta	33 48 50 S	168 41 21 „
Paris	48 50 13 N	20 0 0 „
Petersburg	59 56 30 „	47 59 8 „
Philadelphia	39 57 8 „	57 29 22 W
Rom	41 53 52 „	30 8 30 O
Stockholm	59 20 34 „	35 43 20 „
Turin	45 4 6 „	25 21 52 „
Upsala	59 51 59 „	35 18 20 „
Vgb. d. g. H.	33 56 3 S	36 8 31 „
Washington	38 53 39 N	59 22 47 W
Wien	48 12 36 „	34 2 36 O
Zürich	47 22 31 „	26 12 45 „

Arithmetik.

Einleitung.

A. Erklärungen und Grundgesetze.

1. Die Grundlage der Arithmetik bildet die natürliche Zahlenreihe: 1, 2, 3, 4 . . . ohne Ende.
2. Irgend welche Zahlen der Zahlenreihe bezeichnet man durch Buchstaben. Allgemeine Zahlen.
3. Bildet man aus mehreren allgemeinen Zahlen eine neue Zahl, so nennt man diese Verbindung einen Zahlenausdruck, oder kurz Ausdruck.
4. Um anzudeuten, dass zwei Ausdrücke gleich sind, verbindet man dieselben durch das Zeichen $=$ (Gleichheitszeichen) z. B. $a = b$. Diese Verbindung heisst eine Gleichung, b die rechte und a die linke Seite derselben.
5. Man nennt eine Zahl a grösser als b $(a > b)$, wenn b der Zahl a in der Zahlenreihe vorangeht, während alsdann b kleiner als a $(b < a)$ genannt wird. $a \gtrless b$, heisst a ungleich b.
6. Die Verbindungen $a > b$, $\alpha < \beta$, $A \gtrless B$ nennt man Ungleichungen.

B. Die einfachen Zahlenverbindungen.

Die Summe zweier Zahlen.

1. Die Summe zweier Zahlen erhält man durch Hinzuzählen (Addition) der Einheiten der einen Zahl zu den Einheiten der andern Zahl.
2. Die Summe von a und b wird bezeichnet durch $a + b$, gelesen a plus b. Die Zahlen a und b werden Summanden genannt.
3. Die Ordnung der Summanden ist gleichgültig. $a + b = b + a$.

Das Produkt zweier Zahlen.

1. Eine Summe von gleichen Summanden heisst ein Produkt, der gleiche Summand wird Multiplikandus, die Wiederholungszahl desselben Multiplikator genannt.

2. Ist a der gleiche Summand, b die Wiederholungszahl, so bezeichnet $a.b$ oder ab das Produkt, gelesen a mal b.
3. $ab = ba$, d. h. Multiplikator und Multiplikandus können vertauscht werden, weshalb man auch a und b die Faktoren des Produkts nennen kann.

Die Potenz einer Zahl.

1. Ein Produkt gleicher Faktoren wird eine Potenz dieses Faktors genannt. Der gleiche Faktor heisst die Basis (Grundzahl), die Wiederholungszahl der Exponent.
2. Ist a die Basis und b der Exponent, so wird die Potenz durch a^b bezeichnet, gelesen a hoch b.
3. Die Potenzen a^2, a^3, a^4 heissen der Reihe nach das Quadrat, der Kubus, das Biquadrat von a.

Die Differenz zweier Zahlen.

1. Denkt man sich a als die Summe zweier Zahlen, von denen der eine Summand b ist, so heisst der andere Summand die Differenz von a und b.
2. Die Differenz von a und b bezeichnet man durch $a - b$, gelesen a minus b. Die Zahl a heisst der Minuend, b der Subtrahend. Das Bilden der Differenz heisst die Subtraction.
3. Aus No. 1 folgt: $(a - b) + b = a$; $(a + b) - b = a$ und $a - (a - b) = b$. Das Zeichen ( ) nennt man eine Klammer, dasselbe deutet an, dass der eingeschlossene Ausdruck als eine Zahl zu betrachten ist.

Der Quotient.

1. Betrachtet man a als das Produkt zweier Zahlen, von welchen die eine gleich b ist, so heisst der andere Faktor der Quotient von a und b.
2. Den Quotienten von a und b bezeichnet man durch $\frac{a}{b}$ oder $a : b$, gelesen a durch b.

Die Zahl a heisst der Dividend, b der Divisor. Das Bilden des Quotienten heisst die Division.

3. Aus 1 folgt: $\frac{a}{b} \cdot b = a$; $\frac{ab}{b} = a$ und $a : \frac{a}{b} = b$.

Die Wurzel aus einer Zahl.

1. Denkt man sich a als die b^{te} Potenz einer Zahl, so heisst die Basis die b^{te} Wurzel aus a.
2. Die b^{te} Wurzel aus a wird durch $\sqrt[b]{a}$ bezeichnet, a heisst der Radikand, b der Wurzelexponent. Das Bilden der Wurzel heisst die Wurzelausziehung oder Radikation.
3. Aus 1 folgt $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$ und $\sqrt[b]{a^b} = a$.

Der Logarithmus einer Zahl.

1. Betrachtet man a als die Basis einer Potenz und b als den Potenzwerth, so wird der Exponent der Logarithmus von b zur Basis a genannt.
2. Den Logarithmus von b zur Basis a bezeichnet man durch $\overset{a}{\log} b$, gelesen Logarithmus von b für die Basis a. Die Zahl b wird der Logarithmand oder Numerus genannt.
3. Aus 1 folgt: $a^{\overset{a}{\log} b} = b$ und $\overset{a}{\log} a^n = n$.

Umformung der Grundgleichungen.

1. Aus $a + b = c$ folgt $a = c - b$
2. „ $a - b = c$ „ $a = c + b$
3. „ $ab = c$ „ $a = \frac{c}{b}$
4. „ $\frac{a}{b} = c$ „ $a = bc$
5. „ $a^n = c$ „ $a = \sqrt[n]{c}$
6. „ $\sqrt[n]{a} = c$ „ $a = c^n$.

Hieraus die Regel: Eine Zahl kann durch die entgegengesetzte Operation von einer Seite der Gleichung auf die andere Seite derselben gebracht werden.

Gesetze für das Rechnen mit allgemeinen und mit numerischen Zahlen.

Addition und Subtraktion.

1. $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$
2. $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$
3. $(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$
4. $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$.
5. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) = (a - b) - (d - c)$.
6. $a - b = (a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c)$.

Bei jeder Zahlenverbindung wie $a - b + c - d - e$, führt man die Operation der Addition und Subtraktion in der Reihenfolge aus, wie dieselben von links nach rechts aufeinander folgen. In den Gesetzen von No. 1—6 können daher alle Klammern fortfallen, vor denen kein Zeichen oder das Pluszeichen steht, ausserdem ergiebt sich noch, dass die Reihenfolge der Addition und Subtraktion gleichgültig ist.

Die Null, die positive und die negative Zahl.

1. Ist in der Differenz $a - b$, $b > a$, so ist $a - b$ keine Zahl der Zahlenreihe, diese Zahlform bedingt eine Erweiterung der Zahlenreihe.

2. Die Differenzen $a - a$ und $b - b$ sind gleich, man nennt jede Null und schreibt $a - a = o$.
3. Die Zahl $o + a = + a$ heisst eine positive Zahl und
$o - a = - a$ „ „ negative Zahl.

Die Zahl a nennt man den Zahlwerth oder die absolute Zahl, die Zeichen $+$ und $-$ die Vorzeichen.

4. Wenn $b > a$, so ist $a - b = o - (b - a) = - (b - a)$, also $a - b$ eine negative Zahl, deren Zahlwerth $b - a$ ist.
5. Durch Einführung der negativen Zahlen entsteht die Zahlenreihe
$$\ldots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$
6. $(+ a) + (+ b) = + (a + b) = a + b$
7. $(- a) + (- b) = - (a + b)$
8. $(+ a) + (- b) = + (a - b) = - (b - a)$
9. $(- a) + (+ b) = - (a - b) = + (b - a)$
10. $(+ a) - (- b) = (+ a) + (+ b) = a + b.$
11. $(- a) - (- b) = (- a) + (+ b)$
12. $a - b + c - d - e \ldots = (+ a) + (- b) + (+ c) + (- d) + (- e) \ldots$ algebraische Summe.

Gesetze der Multiplikation und Division.

A. Absolute Zahlen.

1. $(ab)\,c = (ac)\,b = a\,(bc) = abc.$
2. $(a \pm b)\,c = ac \pm bc.$
$(a \pm b)\,(c \pm d) = (a \pm b)\,c \pm (a \pm b)\,d$
$ax \pm x = (a \pm 1)\,x.$
3. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a : c}{b : c}.$
4. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b} = a : \frac{b}{c}$
5. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}$
6. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
7. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a : c}{b : d}$
8. $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
9. $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$
$\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm ac}{c}.$

10. $\frac{a}{\alpha} \pm \frac{b}{\beta} \pm \frac{c}{\gamma} \cdots = \left(a \cdot \frac{n}{\alpha} \pm b \cdot \frac{n}{\beta} \pm c \cdot \frac{n}{\gamma} \cdots\right) : n.$

11. $\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$. Theilweise Division.

B. Positive und negative Zahlen.

1. $a \cdot o = o$
2. $(-a)\,b = a\,(-b) = -ab$
3. $(-a)\,(-b) = +ab$
4. $\frac{o}{a} = o$
5. $\frac{-a}{+b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
6. $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$.

Ungleichungen.

1. $a > b$, wenn $a - b > o$
2. Wenn a und b absolute Zahlen
   $+a > o$, $-a < o$, $+a > -b$ und ist $a > b$
   $+a > +b$, $-a < -b$
   $a + c > b + c$, $a - c > b - c$, $c - a < c - b$.
   $ac \gtrless bc$, je nachdem $c \left|\begin{matrix} + \\ a \\ - \end{matrix}\right|$ ist.
   $\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{c}$, je nachdem $c \left|\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right|$ ist.
3. Wenn a, b und c positive Zahlen und $a > b$ ist, so ist $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$
4. Ist $a > b$ und $c > d$, so ist:
   $a + c > b + d$ und $a - d > b - c$ und wenn a, b, c u. $d > o$, so ist: $ac > bd$ und $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Die gebrochenen Zahlen und Grenzwerthe.

1. Wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ keine Zahl der Zahlenreihe ist, so heisst derselbe eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch und zwar ein echter Bruch wenn $a < b$ ist, sonst ein unechter Bruch.
2. Nimmt man $\frac{1}{b}$ der Einheit als Einheit der Zahlenreihe, so ergiebt sich die erweiterte Zahlenreihe:
   $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b} \cdots \frac{b-1}{b}, \frac{b}{b}, \frac{b+1}{b} \cdots$.

Die für die Zahlen der ursprünglichen Zahlenreihe aufgestellten Gesetze gelten auch für diese Zahlenreihe.

3. Die Glieder der Zahlenreihe:

$$\ldots\ldots -\frac{b+1}{b}, -\frac{b}{b}, -\frac{b-1}{b}\ldots\ldots -\frac{2}{b} -\frac{1}{b}, 0, \frac{1}{b}\ \frac{2}{b}\ldots\ldots$$

nennt man reelle Zahlen.

4. $\frac{1}{a}$ heisst der reciproke Werth von a.

5. Eine Zahl, welche grösser wird, wie jede angebbare Zahl, nennt man eine unendlich grosse Zahl, und bezeichnet sie mit ∞

6. Wird a unendlich gross, so ist der Grenzwerth (limes) von $\frac{1}{a}$ die Null, d. h. $\lim \frac{1}{a} = 0$ und $\lim \left(\frac{1}{a} \pm b.\right) = \pm b.$

7. Lässt man in der Zahlenreihe No. 3 die Zahl b wachsen, so rücken, während b von 1 bis ∞ wächst, die Glieder derselben immer näher und näher aneinander. Für $b = \infty$ ist ein Unterschied zweier aufeinander folgenden Glieder nicht mehr angebbar, in diesem Falle heisst die Zahlenreihe eine stetige.

8. $\lim \frac{a}{b} = \infty$, wenn $\lim b = 0$

9. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ und $\infty - \infty$ sind unbestimmte Zahlformen.

Potenzen.

A. Potenzen mit positiven Exponenten.

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$, wenn $p > q$.
3. $(ab)^p = a^p b^p$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = a^p : b^p$
5. $(a^p)^q = (a^q)^p = a^{pq}$.

Die vorstehenden Gesetze gelten für positive und negative Basen. Für negative Basen hat man zu beachten:

6. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
7. Wenn a und b absolute Zahlen und dabei $a > b$ so wird $a^n > b^n$

$$\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^4 \ldots\ldots$$

$$\frac{b}{a} > \left(\frac{b}{a}\right)^2 > \left(\frac{b}{a}\right)^3 > \left(\frac{b}{a}\right)^4 \ldots\ldots$$

8. Wenn $a > 1$, so ist

$a^n > 1 + n(a-1)$ und $\left(\frac{1}{a}\right)^n < \frac{1}{1+n(a-1)}$, daher für $n = \infty$ $\lim a^n = \infty$ und $\lim \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$.

B. Potenzen mit negativen Exponenten.

1. Soll a^{p-q} stets gleich $a^p : a^q$ sein, so ergiebt sich
für $p = q$, $a^0 = 1$ und
für $p = o$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$.
2. Die Gesetze No. 1—6 in *A* gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

C. Potenzen von Summen und Differenzen.

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ und $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$.
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ und $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$
5. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ und
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

D. Eine Zahl als Summe von Potenzen einer andern Zahl.

1. Jede Zahl z lässt sich als eine Summe von Potenzen einer andern Zahl darstellen.

Bildet man: $z = qx + r_o$
$q = q_1 x + r_1$
$q_1 = q_2 x + r_2$
. . . . . .
$q_{n-1} = o.x + r_n$, so ist

$$z = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} \ldots r_2 x^2 + r_1 x + r_o$$
$$= r_n r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_2 r_1 r_o \text{ (Basis } x)$$

Ist $z < x$ so werden die Exponenten negativ.

2. Sind $r_o r_1 r_2 \ldots r_n$ positiv und kleiner als x, so hat man, um jede Zahl als eine Potenzreihe von x darzustellen, ausser der Null noch für die $x - 1$ ersten Zahlen besondere Zeichen (Ziffern) zu wählen. Für x gleich Zehn erhält man das dekadische Zahlensystem.
3. Werden bei einer Potenzreihe die Exponenten der aufeinander folgenden Glieder kleiner, so heisst die Reihe fallend und bei umgekehrter Anordnung steigend.
4. Die Summe, Differenz und das Produkt zweier geordneten endlichen Potenzreihen geben stets wieder eine geordnete endliche Potenzreihe. Zur Division von Potenzreihen benutzt man die Formel für die theilweise Division.

5. Das Rechnen mit dekadischen Zahlen ist ein Rechnen mit geordneten Potenzreihen.

Die Eigenschaften der ganzen Zahlen.

A. Erklärungen.

1. Ist $a = bcd$, so nennt man b, c und d Theiler von a und a ein Vielfaches von b, c, d oder bc, bd u. s. w.
a wird ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen b, c, d genannt.
2. Eine Zahl, welche Theiler hat, heisst eine zusammengesetzte Zahl. Eine Zahl, welche den Theiler 2 hat, wird eine gerade Zahl genannt, jede andere Zahl heisst ungerade.
3. Jede Zahl, welche nur 1 und sich selbst zum Theiler hat, wird eine absolute Primzahl genannt.
4. Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich in ein Produkt von absoluten Primzahlen verwandeln.
5. Haben zusammengesetzte Zahlen gemeinschaftliche Theiler, so nennt man dieselben relativ zusammengesetzt, haben sie keinen gemeinschaftlichen Theiler, so werden sie relative Primzahlen genannt.

B. Gesetze.

1. Jeder gemeinschaftliche Theiler von a und b ist auch ein Theiler von $a \pm b$.
2. ab ist durch c theilbar, wenn ein Faktor durch c theilbar ist.
3. Wenn $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$ und $r < d$, also $D = qd + r$, so heisst r der Divisionsrest. Jeder Theiler von D und d ist auch ein Theiler von r. Jeder Theiler von d und r ist auch ein Theiler von D.
4. Wenn
$$\begin{aligned} D &= qd + r_1 \\ d &= q_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0, \end{aligned}$$
so ist r_n der grösste gemeinschaftliche Theiler von D und d.
Jeder Theiler von D und d ist auch ein Theiler von r_n.
5. Sind p und q relative Primzahlen und $\frac{a}{b} \cdot p$, so wie $\frac{a}{b} \cdot q$ ganze Zahlen, so ist auch $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl.
6. Wenn p und q relative Primzahlen und $\frac{a}{p}$, sowie auch $\frac{a}{q}$ ganze Zahlen sind, so ist $\frac{a}{pq}$ eine ganze Zahl.

7. Ist $\frac{ab}{p}$ eine ganze Zahl; $\frac{a}{p}$ aber keine ganze Zahl, so muss $\frac{b}{p}$ eine ganze Zahl sein. (a und p relativ prim.)
8. $\frac{abcd}{p}$ ist keine ganze Zahl, wenn a, b, c, d und p relative Primzahlen sind.
9. Wenn $a, b, c, d \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ verschiedene absolute Primzahlen sind, so kann nicht
$$abcd \ldots = \alpha\beta\gamma\delta \ldots$$ sein.
Jede Zahl lässt sich nur auf eine Art in ein Produkt absoluter Primzahlen verwandeln.
10. Sind a und b relative Primzahlen, so kann $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ keine ganze Zahl sein.
11. Ist $z = ab$, so muss einer der Faktoren, a oder $b < \sqrt{z}$ sein. Hat z keinen Faktor $< \sqrt{z}$, so ist z eine absolute Primzahl.
12. Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu bestimmen, zerlege man dieselben in ihre Primfaktoren und bilde das Produkt der ungleichen Primfaktorenpotenzen, welche den grössten Exponenten haben.
$\alpha^2\beta$, $\alpha\beta\gamma^2$, $\alpha\gamma^2$. Kleinstes gem. Vielf. $\alpha^2\beta\gamma^2$.

C. Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

$z = r_0 + r_1 10 + r_2 10^2 + r_3 10^3 + r_4 10^4 \ldots r_n 10^n$ sei irgend eine Zahl, so ist:

1. z durch 2 theilbar, wenn $r_0 = 0$ oder eine gerade Zahl ist.
2. z „ 4 „ „ $r_0 + 2r_1$ durch 4 theilbar ist.
3. z „ 8 „ „ $r_0 + 2r_1 + 4r_2$ durch 8 theilbar ist.
4. z „ 3 oder 9 theilbar, wenn $r_0 + r_1 + r_2 \ldots r_n$ durch 3 oder 9 theilbar ist.
5. z „ 5 theilbar, wenn $r_0 = 0$ oder 5 ist.
6. z „ 11 theilbar, wenn $r_0 + r_2 + r_4 \ldots - (r_1 + r_3 + r_5 \ldots)$ durch 11 theilbar ist.

Decimalbrüche.

1. Ist z eine ganze Zahl, so wird ein Bruch von der Form $\frac{z}{10^p}$ ein Dezimalbruch genannt. z heisst der Zähler und 10^p der Nenner.

Da $z = r_n 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} \ldots r_{p+1} 10^{p+1} + r_p 10^p + r_{p-1} 10^{p-1} \ldots r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$ ist, so wird im Allgemeinen:

$$\frac{z}{10^p} = r_n 10^{n-p} + r_{n-1} 10^{n-1-p} + \cdots r_{p+1} 10 + r_p + r_{p-1} 10^{-1} + r_{p-2} 10^{-2} + \ldots r_0 10^{-p}.$$

Jeder Dezimalbruch ist also eine geordnete fallende Potenzreihe mit positiven und negativen Exponenten. Deutet man die Stelle, in welcher die negativen Exponenten beginnen durch ein Komma an, so ist

$$\frac{z}{10^p} = r_n r_{n-1} \cdots r_p, r_{p-1} r_{p-2} \cdots r_2 r_1 r_0 \text{ (Basis 10).}$$

z. B. $\frac{12876}{10^3} = 12{,}876$

$$\frac{12876}{10^5} = 0{,}12876$$

$$\frac{12876}{10^8} = 0{,}00012876$$

2. Man kann an jeden Dezimalbruch, ohne seinen Werth zu ändern, zur Rechten beliebig viele Nullen anhängen.
3. Ein Dezimalbruch wird mit 10^n multiplicirt, wenn man das Komma um n Stellen nach rechts, und durch 10^n dividirt, wenn man dasselbe um n Stellen nach links rückt.
4. Eine Einheit irgend einer Dezimalstelle ist grösser als die Summe aller folgenden Bruchstellen.
5. Kürzt man einen Dezimalbruch auf n Stellen ab, indem man die folgenden fortlässt, so muss die Ziffer in der n^{ten} Stelle um eine Einheit vergrössert werden, wenn die Ziffer in der $n+1^{\text{sten}}$ Stelle > 5 war.
6. Um einen Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Dezimalbruch mit dem Nenner 10^n zu verwandeln, suche man die nächste ganze Zahl, welche dem Produkt $\frac{a10^n}{b}$ entspricht und dividire dieselbe durch 10^n.
7. Sind a und b relative Primzahlen, so giebt es, wenn die Primfaktoren von b die Zahlen 2 oder 5 sind, immer einen Werth von n für welchen $\frac{a10^n}{b}$ eine ganze Zahl wird.
8. Hat b in No. 7 noch andere Primfaktoren als 2 oder 5, so lässt sich $\frac{a}{b}$ nur angenähert als Dezimalbruch darstellen. Bei dem erhaltenen Bruche müssen von irgend einer Stelle an dieselben Ziffern in derselben Folge wiederkehren; solche Decimalbrüche nennt man periodische.
9. Bezeichnen bei einem periodischen Dezimalbruch $a, b\bar{c}$; a die Ganzen, b, p Stellen vor der Periode und c die Periode von n Stellen, so ist: $a, b\bar{c} = \frac{abc - ab}{10^p(10^n - 1)}$.
10. Für die Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen gelten die Gesetze der Addition und Subtraktion geordneter Potenzreihen, das Komma verändert also seine Stelle nicht.

11. Da $\frac{a}{10^n} \cdot \frac{b}{10^p} = \frac{ab}{10^{n+p}}$ ist, so werden zwei Dezimalbrüche mit einander multiplicirt, indem man die Zähler multiplicirt und vom Produkt so viel Stellen von rechts nach links abschneidet, als beide Brüche zusammen Dezimalstellen haben.

12. Da $\frac{a}{10^n} : \frac{b}{10^p} = \frac{a10^p}{10^n} : b$ ist, so wird ein Dezimalbruch durch einen andern dividirt, indem man den Dividend mit dem Nenner des Divisors multiplicirt und dieses Produkt durch den Zähler des Divisors dividirt.

13. Abgekürzte Multiplikation. Man fange die Multiplikation mit der höchsten Stelle des einen Faktors an und kürze den andern Faktor, vor jeder Multiplikation mit einer der folgenden Stellen, um eine Stelle ab.

14. Abgekürzte Division. Man fängt die Division in gewöhnlicher Weise an und kürzt, anstatt Nullen an den Rest anzuhängen, bei jeder folgenden theilweisen Division, den Divisor um eine Stelle ab.

Kettenbrüche.

1. Wenn $N = q_1 Z + r_1$
$Z = q_2 r_1 + r_2$
$r_1 = q_3 r_2 + r_3$
. . . . . .
$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + r_{n+1}$, so ergiebt sich der Kettenbruch

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3 + \cdot}}}$$

2. Die Brüche $\frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}$, $\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}$ . . . heissen Näherungsbrüche, dieselben sollen durch $\frac{Z_1}{N_1}$, $\frac{Z_2}{N_2}$, $\frac{Z_3}{N_3}$ etc. bezeichnet werden.

3. Wenn $\frac{Z_0}{N_0} = \frac{0}{1}$ ist, so gilt von $n = 2$ ab

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{q_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{q_n N_{n-1} + N_{n-2}}$$

4. $\frac{Z}{N} = \frac{115}{151} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{7}}}}$.

Quotienten: 1, 3, 5, 7,

Näherungsbrüche: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{16}{21}, \frac{115}{151}$.

5. $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = (-1)^n$,

6. $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{(-1)^n}{N_n N_{n-1}}$;

7. $\frac{Z}{N} = \frac{Z_n r_{n-1} + Z_{n-1} r_n}{N_n r_{n-1} + N_{n-1} r_n}$;

8. $\frac{Z}{N} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{(-1)^n r_n}{N N_n}$.

9. Kein Bruch mit kleinerem Nenner als der Nenner eines Näherungsbruches kommt dem Werthe des ganzen Bruches näher als dieser Näherungsbruch.

Wurzeln.

A. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{a}$.

3. $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p = a^{\frac{p}{n}}$, wenn $\frac{p}{n}$ eine ganze Zahl.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

5. $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nr]{a^{pr}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{p}{r}}}$, wenn $\frac{n}{r}$ und $\frac{p}{r}$ ganze Zahlen.

6. Mit Hülfe von Nr. 5 $\sqrt[p]{a^q}\ \sqrt[n]{b^r} = \sqrt[np]{a^{qn} b^{pr}}$.

7. Es ist: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, während

$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}}$ keine der bisher betrachteten

Zahlen ist. Die letztere Wurzel nennt man eine imaginaire Wurzel.

8. Bezeichnet man $\sqrt{-1}$ durch i, so ist:
$i^{4n} = +1$, $i^{4n+1} = +i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

9. Bringt man $\sqrt{-a}$ auf die Form $\sqrt{-a} = \sqrt{ai^2} = i\sqrt{a}$, so lassen sich die Gesetze für die reellen Wurzeln auch für imaginaire Wurzeln anwenden.

10. Die Wurzel ist ein vieldeutiger Ausdruck.
$\sqrt{a^2} = \pm a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$ und $\frac{a}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$, $\sqrt[4]{a^4} = \pm a$ und $\pm ai$.

11. Wenn a und b absolute Zahlen sind und $a > b$, so ist:
$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

12. Sind a und b absolute Zahlen, so ist
$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[p]{b}, \text{ wenn } a^p > b^n.$$

13. Ist $a > 1$, so hat man:
$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n} \text{ und } \sqrt[n]{\frac{1}{a}} > \frac{1}{1+\frac{a-1}{n}}$$

14. Wenn n eine absolute Zahl ist, so wird
$$lim\ \sqrt[n]{a} \text{ für } n = \infty \text{ gleich } 1.$$

B. Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

1. Versteht man unter $a^{\frac{p}{q}}$ stets $\sqrt[q]{a^p}$, so behalten die Gesetze von Nr. 1—5 in *A* Seite 66 ihre Gültigkeit auch für gebrochene Exponenten. Das Rechnen mit Wurzeln lässt sich daher in ein Rechnen mit Potenzen verwandeln.

2. Giebt man in a^x, der Zahl x der Reihe nach alle Werthe der stetigen Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$, so bilden die Potenzwerthe eine stetige mit ∞ oder o anfangende Zahlenreihe, je nachdem die absolute Zahl a kleiner oder grösser als 1 ist.

3. Nehmen Potenzen für Grenzwerthe der Basen und Exponenten die Formen 1^∞, 0^0, ∞^0 an, so sind dieselben nicht 1 sondern unbestimmt. $lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nimmt für $n = \infty$ die Form 1^∞ an, der Werth dieser Potenz ist eine bestimmte zwischen 2 und 4 liegende Zahl.

C. Irrationale Zahlen und Wurzelausziehung.

1. Sind a und n ganze Zahlen und ist a nicht die $n$te Potenz einer Zahl der Zahlenreihe, so giebt es auch keine gebrochene

Zahl $\frac{b}{c}$, welche der Gleichung $\sqrt[n]{a} = \frac{b}{c}$ genügte. Die $\sqrt[n]{a}$ heisst in diesem Falle eine irrationale Zahl, im Gegensatz zu den Zahlen der Zahlenreihe, welche rationale Zahlen genannt werden. Es lassen sich stets zwei Grenzzahlen angeben zwischen welchen $\sqrt[n]{a}$ liegt und der Unterschied dieser Grenzzahlen lässt sich so klein machen als man nur will.

2. Die für die rationalen Zahlen bewiesenen Gesetze gelten auch für irrationale Zahlen. Um die Richtigkeit eines für rationale Zahlen bewiesenen Gesetzes für irrationale Zahlen nachzuweisen kann man den folgenden Satz benutzen: Wenn in der Gleichung $a + x = b + y$, x und y solche Zahlen sind, welche man so klein machen kann als man nur will, so ist stets $a = b$.

3. Wenn $\sqrt{a^2 + b} = a + x$, so ist $x = \frac{b}{2a + x}$ und für x kleiner als 1 ist angenähert $x = \frac{b}{2a}$; a findet man mit Hülfe der Tabelle der Quadratzahlen.

4. Wenn $\sqrt[3]{a^3 + b} = a + x$, so ist $x = \frac{b}{3a^2 + 3ax + x^2}$ und für x kleiner als 1 ist angenähert $x = \frac{b}{3a^2}$; a findet man mit Hülfe der Tabelle der Kubikzahlen.

5. $$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

6. $$\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-r}}.$$

7. $$\frac{a}{b\sqrt{c} \pm d\sqrt{g}} = \frac{a(b\sqrt{c} \mp d\sqrt{g})}{b^2 c - d^2 g}.$$

8. $$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c} \pm \sqrt{d}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c} \mp \sqrt{d})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - d}.$$

9. $$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{b \pm c}.$$

D. Die complexen Zahlen.

1. Wenn $a + bi = \alpha + \beta i$, so ist $a = \alpha$ und $b = \beta$.

$+\sqrt{a^2 + b^2} = r$ heisst der Modul der complexen Zahl $a + bi$.

2. $(a+bi) \pm (\alpha+\beta i) = a \pm \alpha + (b \pm \beta)\, i$
$(a+bi)(\alpha+\beta i) = a\alpha - b\beta + (a\beta + b\alpha)\, i$
$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$
$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{(b\alpha - a\beta)\, i}{\alpha^2+\beta^2}$$
$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

3. Setzt man $\frac{a}{r} = \cos\varphi$, $\frac{b}{r} = \sin\varphi$, also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ so ist:
$a \pm bi = r\,[\cos(\varphi + 2p\pi) \pm i \sin(\varphi + 2p\pi)]$. Normalform. p eine ganze Zahl.

4. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$
$(\cos\alpha + i\sin\alpha) : (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$.
$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha)$, n eine ganze Zahl. (Moivre'sche Satz).
$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(\alpha + 2p\pi)}{n} \pm i \sin\frac{(\alpha + 2p\pi)}{n}.$$
Für p sind alle ganzen Zahlen von Null bis $n-1$ zu setzen.

5. $\sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi} = 2\sqrt[n]{r} \cdot \cos\frac{(\varphi + 2p\pi)}{n} = u.$
Für $n = 3$ ist $u_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $u_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
$$u_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right).$$

6. Wenn p und q relative Primzahlen sind und k eine ganze Zahl, so ist:
$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi) \pm i\sin\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi).$$

Die Logarithmen.

1. Ist die Basis eines Logarithmensystems > 1, so liegen die Logarithmen der Zahlen von 0 bis ∞ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$.
$$\log 0 = -\infty,\ \log 1 = 0,\ \log\infty = \infty.$$

2. Für die Basis a hat man:
$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\log_a b^n = n \log_a b$$
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

3. Die Logarithmen für die Basis $e = lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ heissen natürliche Logarithmen. (Lord Napier 1614). Man schreibt statt $\overset{e}{\log} b$ kürzer $\log_n b$.
   Die Zahl e ist angenähert: 2,718281828459...
4. Die Logarithmen für die Basis 10 heissen Briggs'sche Logarithmen. (Briggs, Professor zu Oxford, 1620). Man schreibt statt $\overset{10}{\log} b$ kürzer $\log b$.
5. Für die Basis 10 hat man:
   $$\log 10^n = n \; ; \; \log 10^{-n} = -n.$$
   $$\log b 10^n = \log b + n$$
   $$\log \frac{b}{10^n} = \log b - n.$$
   Die positiven oder negativen ganzen Einheiten eines Logarithmus nennt man die Kennziffer, den echten Decimalbruch seine Mantisse.
   Nennt man in der dekadischen Zahl
   $$\frac{Z}{10^p} = r_n 10^{n-p} + r_{n-1} 10^{n-1-p} + \ldots r_{p+1} 10 + r_p + r_{p-1} 10^{-1} + r_{p-2} 10^{-2} + \ldots r_0 10^{-p}$$ die Exponenten von 10 die Ordnungszahlen der Ziffern, so ist die Kennziffer eines Logarithmus gleich der Ordnungszahl der höchsten geltenden Ziffer. Z. B.
   von $\log 345678$ ist die Kennziffer $+5$
   „ $\log 0{,}00285$ „ „ -3.
6. Wenn a eine grosse Zahl und $\log (a+1) - \log a = d$ ist, so ist, wenn x kleiner als 1, angenähert:
   $$\log (a + x) = \log a + x \,.\, d.$$
7. $\log_n 10 \,.\, \log_e = 1$.
   $\log b = \frac{1}{\log_n 10} \cdot \log_n b$, $\left(\frac{1}{\log_n 10} = 0{,}43429448\right.$ Modul des Briggs'schen Systems).
   $\log_n b = \frac{1}{\log e} \log b$, $\left(\frac{1}{\log e} = 2{,}30258509\right.$ Modul des natürlichen Systems).
8. Die Bestimmung von $\log_n (a + bi)$.
   Es ist $e^x = lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für $n = \infty$, ferner
   aus $\cos x + i \sin x = \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}\right)^n$ folgt für $n = \infty$
   $\cos x + i \sin x = e^{xi}$, hieraus:
   $$\log_n (a + bi) = \log_n r \left[\cos (\varphi + 2p\pi) + i \sin (\varphi + 2p\pi)\right]$$
   $$= \log_n r \, e^{(\varphi + 2p\pi)i}$$
   $$= \log_n r + (\varphi + 2p\pi)i.$$

Die Factorielle, Binomialcoefficienten.

1. Das Product: $a\,(a \pm d)\,(a \pm 2d)\,(a \pm 3d) \ldots [a \pm (n-1)d] = a^{n|\pm d}$ heisst eine Factorielle. $1^{n|1} = n^{n|-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ die Facultät von n.

2. Der Quotient: $\dfrac{a^{n|-1}}{1^{n|}} = \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} = (a)_n$ heisst ein Binomialcoefficient. n ist immer eine ganze positive Zahl.

3. $(a)_n = \dfrac{a}{n}(a-1)_{n-1} = (a)_{n-1} \cdot \dfrac{a-n+1}{n}$, $(a)_0 = 1$, $0! = 1$.

Wenn a eine ganze positive Zahl, so ist

4. $\dfrac{a!}{(a-n)!\,n!} = (a)_n = (a)_{a-n}$

5. $(a)_n + (a)_{n-1} = (a+1)_n$

6. $(a)_a + (a+1)_a + (a+2)_a \ldots (n)_a = \sum_{y=a}^{y=n} (y)_a = (n+1)_{a+1}$

7. $(a+b)_n = (a)_n + (a)_{n-1}(b)_1 + (a)_{n-2}(b)_2 \ldots (b)_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} (a)_{n-\alpha}(b)_\alpha$

Die Combinationslehre.

1. Permutationen. Die Zahlen 1, 2, 3 ... n bezeichnen beliebige Elemente. Von zwei Elementen heisst dasjenige das höhere, dessen Ordnungszahl die grössere ist.

$P\,(1, 2, \ldots n)$ bedeutet die Darstellung der Permutationen, bei Wiederholung der Elemente $P'\,(1^{\alpha_1}\,2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n})$, $P\left(\dfrac{1, 2, 3 \ldots n}{r}\right)$ soll die Permutationen von den Elementen $1, 2, 3 \ldots r-1, r, r+1, \ldots n$ bedeuten und $AP\,(1 \ldots n)$ und $AP'\,(1^{\alpha_1} \ldots n^{\alpha_n})$ bezeichnen die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen.

2. $P(1,2 \ldots n) = 1P\left(\dfrac{1, 2, 3 \ldots n}{1}\right) + 2P\left(\dfrac{1, 2, 3 \ldots n}{2}\right) + \ldots$

$nP\left(\dfrac{1, 2, 3 \ldots n}{n}\right)$. $\qquad AP\,(1, 2, 3 \ldots n) = n!$

3. $AP'\,(1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}) = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots \alpha_n)!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_n!}$.

4. $P\,(123) = 123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321,$

$P(1234) = 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,$
$2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,$
$3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,$
$4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.$

$P'(1223) = 1223, 1232, 1322, 2123, 2132, 2213,$
$2231, 2312, 2321, 3122, 3212, 3221.$

5. Irgend zwei Elemente einer Complexion bilden eine Nichtfolge, wenn das erste Element höher ist als das zweite. Die Complexion 4312, hat die Nichtfolgen 43, 41, 42, 31, 32.

Durch Vertauschung von zwei Elementen ändert sich die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

Entwickelt man die Permutationen durch Vertauschung von je zwei Elementen, so sind in den auf einander folgenden Complexionen die Nichtfolgen abwechselnd von gerader und ungerader Anzahl.

6. Die Combinationen. Die Bezeichnungen analog denen in (1). r bezeichnet die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Elemente, die Klasse.

$$\overset{r}{C}(1, 2 \ldots n) = 1\,\overset{r-1}{C}(2, 3 \ldots n) + \overset{r}{C}(2, 3 \ldots n)$$
$$= 1\,\overset{r-1}{C}(2 \ldots n) + 2\,\overset{r-1}{C}(3 \ldots n) \ldots$$
$$(n-r+1)\,\overset{r-1}{C}[(n-r+2) \ldots n]$$

7. $A\overset{r}{C}(1 \ldots n) = (n)_r$

8. $\overset{2}{C}(1234) = 12,\ 13,\ 14,\ 23,\ 24,\ 34$

$\overset{3}{C}(12345) = 123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135$
$145,\ 234,\ 235,\ 245,\ 345$

9. $\overset{r}{C'}(123 \ldots n) = 1\,\overset{r-1}{C'}(123 \ldots n) + \overset{r}{C'}(23 \ldots n)$
$= 1\,\overset{r-1}{C'}(123 \ldots n) + 2\,\overset{r-1}{C'}(23 \ldots n) + 3\,\overset{r-1}{C'}(3 \ldots n) \ldots$
$n\,\overset{r-1}{C'}(n)$

10. $A\overset{r}{C'}(1 \ldots n) = (n+r-1)_r$.

11. $\overset{3}{C'}(1234) = 111,\ 112,\ 113,\ 114,\ 122,\ 123,\ 124,\ 133,\ 134,\ 144,$
$222,\ 223,\ 224,\ 233,\ 234,\ 244,\ 333,\ 334,\ 344,\ 444.$

12. Die Variationen. Die Bezeichnungen analog denen in (1).

$$\overset{r}{V}(1 \ldots n) = 1\,\overset{r-1}{V}\left(\frac{123 \ldots n}{1}\right) + 2\,\overset{r-1}{V}\left(\frac{12 \ldots n}{2}\right) \ldots .$$
$$n\,\overset{r-1}{V}\left(\frac{12 \ldots n}{n}\right)$$

13. $A\overset{r}{V}(1 \ldots n) = (n)_r \cdot r!$

14. $\overset{r}{V'}(1 \ldots n) = 1\,\overset{r-1}{V'}(1 \ldots n) + 2\,\overset{r-1}{V'}(1 \ldots n) \ldots n\,\overset{r-1}{V'}(1 \ldots n)$

15. $A\overset{r}{V'}(1 \ldots n) = n^r$

16. Man erhält aus den Combinationen die Variationen, indem man die einzelnen Complexionen derselben permutirt.

Die Determinanten.

1. Wenn n^2 Elemente und zwar je n in n Reihen geordnet, wie

$$\begin{array}{lll} a_1\ b_1, & a_1\ b_1\ c_1, & a_1\ b_1\ c_1\ d_1, \\ a_2\ b_2 & a_2\ b_2\ c_2 & a_2\ b_2\ c_2\ d_2 \\ & a_3\ b_3\ c_3 & a_3\ b_3\ c_3\ d_3 \\ & & a_4\ b_4\ c_4\ d_4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \cdots a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \cdots a_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \cdots a_{n,n} \end{array}$$

gegeben sind, so versteht man unter der Determinante (D) dieses Systems die algebraische Summe der Producte von je n Elementen, die sämmtlich verschiedenen Zeilen und Colonnen angehören. Die Anfangsglieder sind: $a_1\,b_2$, $a_1\,b_2\,c_3$, $a_1\,b_2\,c_3\,d_4$, $a_{1,1}\,a_{2,2} \cdots a_{n,n}$. Die andern Glieder erhält man durch Permutation der Ordnungszahlen, oder durch Permutation der Buchstaben und Beibehaltung der Ordnungszahlen. Positiv sind die Glieder mit gerader Anzahl von Nichtfolgen und negativ die Glieder mit ungerader Anzahl von Nichtfolgen. Die (D) bezeichnet man dadurch, dass man die Elemente wie oben zusammenstellt, oder durch $\Sigma \pm a_1\,b_2$, $\Sigma \pm a_1\,b_2\,c_3$.

2. Vertauscht man die Zeilen einer (D) mit den Colonnen, so wird dieselbe nicht geändert weil die Anfangsglieder dieselben bleiben.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Colonnen einer (D), dann ändert dieselbe ihr Vorzeichen, denn die Anfangsglieder gehören in Bezug auf Nichtfolgen verschiedenen Gruppen von Permutationen an.

4. Sind in einer (D) die Elemente einer Zeile oder Colonne gleich den Elementen einer andern Zeile oder Colonne, so ist die (D) gleich Null. Denn durch Vertauschung dieser wird D gleich $-D$ und auch gleich D, also gleich Null.

5. Bezeichnet man bei einer (D) den Factor von a_r durch α_r, den Factor von b_r durch β_r etc., so sind $\alpha_r\ \beta_r\ \ldots$ Determinanten vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Es ist
$$\begin{aligned} D &= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \cdots a_n\alpha_n \quad (1) \\ &= b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \cdots b_n\beta_n \quad (2) \\ &= c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \cdots c_n\gamma_n \quad (3) \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man in (1) Elemente einer andern Colonne statt a,
" (2) " " " " b,
" (3) " " " " c,
etc.,

so ist jeder dieser Ausdrücke gleich Null, weil jeder eine Determinante ist, in welcher zwei Reihen gleiche Elemente haben.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} c_2 a_2 \\ c_3 a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 a_3 \\ c_1 a_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 a_1 \\ c_2 a_2 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 b_3 \\ a_1 b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$$

$$0 = b_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$0 = c_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

6. Da $pD = pa_1\,\alpha_1 + pa_2\,\alpha_2 \cdots pa_n\,\alpha_n$, so ist auch

$$p \begin{vmatrix} a_1 a_2 \cdots a_n \\ b_1 b_2 \cdots b_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1, pa_2, pa_3 \cdots pa_n \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots b_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ pb_1 b_2 \cdots b_n \\ pc_1 \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix}$$

z. B. $\begin{vmatrix} ab_1 c_1 \\ ab_2 c_2 \\ ab_3 c_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1b_1 c_1 \\ 1b_2 c_2 \\ 1b_3 c_3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} abc_1 \\ abc_2 \\ abc_3 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 11c_1 \\ 11c_2 \\ 11c_3 \end{vmatrix} = 0.$

7. Wenn $a_r = p_r + q_r + s_r$, so ist:

$$D = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 \cdots$$
$$+ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + q_3\alpha_3 \cdots$$
$$+ s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 \cdots \text{ d. h.}$$

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1+s_1, p_2+q_2+s_2, p_3+q_3+s_3 \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \\ b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \\ c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 q_2 \cdots q_n \\ b_1 b_2 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 s_2 \cdots s_n \\ b_1 b_2 \cdots b_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix}$$

z. B. $\begin{vmatrix} a_1 b_1 x_1 + y_1 \\ a_2 b_2 x_2 + y_2 \\ a_3 b_2 x_3 + y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 x_1 \\ a_2 b_2 x_2 \\ a_3 b_3 x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 b_1 y_1 \\ a_2 b_2 y_2 \\ a_3 b_3 y_3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, pa_1 + c_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad pa_2 + c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad pa_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, x_1 - a, y_1 - b \\ 1, x_2 - a, y_2 - b \\ 1, x_3 - a, y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, x_1 y_1 \\ 1 \quad x_2 y_2 \\ 1 \quad x_3 y_3 \end{vmatrix}$$

8. Wenn $D = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix}$ und $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 \cdots A_n \\ B_1 B_2 B_3 \cdots \\ C_1 C_2 C_3 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{vmatrix}$ so ist

$$D\cdot\Delta=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\cdots, & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3\cdots, \\ & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3\cdots \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3\cdots, & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3\cdots, \\ & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3\cdots \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3\cdots, & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3\cdots, \\ & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3\cdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Die Richtigkeit folgt durch Zerlegung nach (7).

9. Wenn: $\begin{vmatrix} a, & b, & c, \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u, & v, & w \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{vmatrix}$ so ist

$$D \qquad \Delta \qquad D\cdot\Delta$$

$$\begin{vmatrix} u, & v \\ u_1, & v_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b, & c \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} B, & C \\ B_1, & C_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a, & c \\ a_1, & c_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A, & C \\ A_1, & C_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A, & B \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix}$$

Für andere Unterdeterminanten ergeben sich entsprechende Ausdrücke. Die Elemente u, v sind aus No. 8 zu entnehmen.

Ist Δ identisch mit D, so ergiebt sich:

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2=\begin{vmatrix} b, & c \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a, & c \\ a_1, & c_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix}^2$$

10. Wenn $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ etc. die in (5) gegebene Bedeutung haben, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}=D^{n-1}$$

Für $n=3$ ist nach (8)

$$\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3, & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3, & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3, & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3, & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3, & c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$$

d. h. $D\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=D^3$ und $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=D^2$

11. Wenn in der Reihe der Zahlen $a_1\ a_2\cdots a_n$ jede von allen folgenden subtrahirt wird, so ergeben sich $(n)_2$ Differenzen, deren Produkt:

$$\begin{matrix} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (a_n-a_{n-1}) \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2\cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2\cdots a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}=P(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$

12. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1-b_1}, & \frac{1}{a_1-b_2} \cdots & \frac{1}{a_1-b_n} \\ \frac{1}{a_2-b_1}, & \frac{1}{a_2-b_2} \cdots & \frac{1}{a_2-b_n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{a_n-b_1}, & \frac{1}{a_n-b_2} \cdots & \frac{1}{a_n-b_n} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot P(a_1 a_2 \cdots a_n) \cdot P(b_1 b_2 \cdots b_n)}{N}$$

wenn N das Produkt aller Nenner der Determinante ist.

Endliche Reihen.

1. Wenn
$$\begin{aligned} z &= qx + r \\ q &= q_1 x + r_1 \\ q_1 &= q_2 x + r_2 \\ &\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= 0x + r_n, \text{ so ist} \end{aligned}$$
$z = [\ldots(((r_n x + r_{n-1})x + r_{n-2})x + r_{n-3})x + \ldots]x + r$, oder
$z = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} \ldots r_2 x^2 + r_1 x + r = f(x)$.

2. Ist $f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} \ldots A_{n-1} z + A_n$ und
$$\begin{aligned} f(z) &= q(z-x) + R \\ q &= q_1(z-x) + R_1 \\ q_1 &= q_2(z-x) + R_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} &= 0\,(z-x) + R_n, \text{ so ist} \end{aligned}$$
$f(z) = R_n(z-x)^n + R_{n-1}(z-x)^{n-1} \ldots R_2(z-x)^2 + R_1(z-x) + R$.

3. Aus $f(z) = q(z-x) + R$ folgt:
$q = B_0 z^{n-1} + B_1 z^{n-2} \ldots B_{n-2} z + B_{n-1}$ und
$B_0 = A_0, B_1 = x B_0 + A_1, B_2 = x B_1 + A_2, \ldots B_{n-1} = x B_{n-2} + A_{n-1}$
und $R = x B_{n-1} + A_n$.

4. Schema für die Berechnung der R, $R_1 \ldots$
$f(z) = 1 \cdot z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 3z + 12$, für $x = 2$:

	2	0	10	14
1	0	5	7	$26 = R$
	2	4	18	
1	2	9	25	$= R_1$
	2	8		
1	4	17	$= R_2$	
	2			
1	6	$= R_3$		
1	$= R_4$			

$f(z) = (z-2)^4 + 6(z-2)^3 + 17(z-2)^2 + 25(z-2) + 26$.

5. Aus 2 ergiebt sich für $z = x$, $f(x) = R$ und hieraus
$f(z) - f(x) = R_n (z-x)^n + R_{n-1}(z-x)^{n-1} + \ldots R_1 (z-x)$ und
$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = R_n (z-x)^{n-1} + R_{n-1}(z-x)^{n-2} + \ldots R_1$
Für $f(x) = x^n$ hat man
$$\frac{z^n - x^n}{z-x} = z^{n-1} + z^{n-2}x + z^{n-3}x^2 \ldots\ldots x^{n-1}$$

6. Specielle Fälle:
$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$$
$$\frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$$
$$\frac{a^4 - b^4}{a-b} = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3$$

7. $$\frac{z^{2p+1} + x^{2p+1}}{z+x} = z^{2p} - z^{2p-1}x + \ldots + x^{2p}$$

8. $$\frac{z^{2p} - x^{2p}}{z+x} = z^{2p-1} - z^{2p-2}x + \ldots - x^{2p-1}$$

9. Wenn $z = \sqrt[n]{a}$, und $x = \sqrt[n]{b}$:
$$\frac{a-b}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \ldots \sqrt[n]{b^{n-1}}$$
$$\frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$
$$\frac{a+b}{\sqrt[2p+1]{a} + \sqrt[2p+1]{b}} = \sqrt[2p+1]{a^{2p}} - \sqrt[2p+1]{a^{2p-1}b} + \ldots + \sqrt[2p+1]{b^{2p}}$$
$$\frac{a-b}{\sqrt[2p]{a} + \sqrt[2p]{b}} = \sqrt[2p]{a^{2p-1}} - \sqrt[2p]{a^{2p-2}b} + \ldots - \sqrt[2p]{b^{2p-1}}$$

10. $$\frac{z^n - x^n}{z^r - x^r} = \frac{z^{n-r} + z^{n-2}x + \ldots x^{n-r}}{z^{r-r} + z^{r-2}x + \ldots x^{r-r}}$$

11. $$\frac{z^{-n} - x^{-n}}{z-x} = -\frac{1}{z^n x^n} \cdot \frac{z^n - x^n}{z-x} = -\frac{z^{n-1} + z^{n-2}x + \ldots x^{n-1}}{z^n x^n}$$

12. $$\frac{z^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{z-x} = \frac{\left(z^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p}{\left(z^{\frac{1}{q}}\right)^q - \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q} = \frac{\sqrt[q]{z^{p-1}} + \sqrt[q]{z^{p-2}}x \ldots \sqrt[q]{x^{p-1}}}{\sqrt[q]{z^{q-1}} + \sqrt[q]{z^{q-2}}x \ldots \sqrt[q]{x^{q-1}}}$$

13. $$\frac{z^{-\frac{p}{q}} - x^{-\frac{p}{q}}}{z-x} = -\frac{1}{z^{\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}} \cdot \frac{z^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{z-x}$$

14. Der Quotient $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ heisst für $z=x$ die Ableitung von $f(x)$ nach x und wird durch $f'(x)$ oder $Df(x)$ bezeichnet
$f''(x)$ oder $D^2f(x)$, die Ableitung der Ableitung,
$f'''(x)$ oder $D^3f(x)$ die Ableitung der zweiten Ableitung etc.

15. Aus den vorstehenden Gesetzen:
$Dx^n=nx^{n-1}$, $D^2x^n=n(n-1)x^{n-2}\ldots D^nx^n=n!$, $D^{n+1}x^n=0$.

$$Dx^{-n}=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}},\quad Dx^{\frac{p}{q}}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1},$$

$$Dx^{-\frac{p}{q}}=-\frac{p}{q}x^{-\frac{p}{q}-1}$$

16. Bildet man von der folgenden Function $F(y)$ alle möglichen Ableitungen nach y, so erhält man:

$$\begin{aligned}F(y)&=A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots.A_ny^n\\DF(y)&=A_1+2A_2y+3A_3y^2+\ldots.nA_ny^{n-1}\\D^2F(y)&=\ldots\ldots+2A_2+3\cdot2A_3y\cdots n(n-1)A_ny^{n-2}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\D^nF(y)&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n!\,A_n\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich für $y=0$

$$A_0=F(0);\ A_1=DF(0);\ A_2=\frac{D^2F(0)}{2!}\ldots A_n=\frac{D^nF(0)}{n!}$$

17. Setzt man in No. 6, $z=x+y$ und ordnet nach steigenden Potenzen von y, so ergiebt sich, wenn noch $f(x)$ auf die rechte Seite gebracht wird:

$F(y)=f(x+y)=f(x)+R_1y+R_2y^2+R_3y^3+\cdots R_ny^n$.

Durch Vergleichung mit No. 16 erhält man:

$F(0)=f(x)$, $DF(0)=Df(x)$, $D^2F(0)=D^2f(x)$ etc., also ist

$$f(x+y)=f(x)+Df(x)\cdot y+\frac{D^2f(x)}{2!}y^2+\ldots.\frac{D^nf(x)}{n!}y^n.$$

Für $f(x)=x^n$ ist:

18. $(x+y)^n=x^n+(n)_1x^{n-1}y+(n)_2x^{n-2}y^2\ldots$

$$+y^n=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}(n)_\alpha x^{n-\alpha}y^\alpha$$

Die arithmetischen Reihen.

1.	Reihe:	y_1,	y_2,	y_3,	y_4,	$y_5\cdots y_n$
1ste	Differenz-Reihe:	Δy_1,	Δy_2,	Δy_3,	$\Delta y_4\cdots$	
2te	„ „	Δ^2y_1,	Δ^2y_2,	$\Delta^2y_3\cdots$		
3te	„ „	Δ^3y_1,	$\Delta^3y_2\cdots$			
4te	„ „	$\Delta^4y_1\cdots$				

$$\Delta^{r+1}y_m=\Delta^ry_{m+1}-\Delta^ry_m$$

2. $y_n = y_1 + (n-1)\Delta y_1 + (n-1)_2 \Delta^2 y_1 + \ldots (n-1)_r \Delta^r y_1$. Wenn die Reihe mit y_0 anfängt

$$y_n = y_0 + \overset{\alpha=n}{\underset{\alpha=1}{}} n\Delta y_0 + (n)_2 \Delta^2 y_0 + \ldots (n)_r \Delta^r y_0 \ldots$$

3. $$S_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} y_\alpha = n y_1 + (n)_2 \Delta y_1 + (n)_3 \Delta^2 y_1 \ldots (n)_{r+1} \Delta^r y_1 + \ldots$$

Von y_0 an gezählt

$$S_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} y_\alpha = (n+1) y_0 + (n+1)_2 \Delta y_0 + (n+1)_3 \Delta^2 y_0 \ldots$$

$$(n+1)_{r+1} \Delta^r y_0 + \ldots$$

4. $$\Delta^n y_0 = y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} \cdots \pm (n)_1 y_1 \mp y_0$$
$$\Delta^n y_1 = y_{n+1} - (n)_1 y_n + (n)_2 y_{n-1} \cdots \pm y_1$$

5. Arithmetische Reihe erster Ordnung:

$$y_1 = a,\ y_n = z,\ \Delta y_1 = d,\ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} y_\alpha = s$$

$$z = a + (n-1)\, d$$

$$s = \frac{(a+z)\, n}{2} = \frac{(2a + (n-1)d)n}{2}$$

6. $$\sum_{x=1}^{x=n} x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

7. $$\sum_{x=1}^{x=n} x^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

8. $$\sum_{x=1}^{x=n} x^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

9. $$\sum_{x=1}^{x=n} x^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

10. $$\sum_{x=1}^{x=n} x^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{(r)_1}{2} B_1 n^{r-1} - \frac{(r)_3}{4} B_3 n^{r-3} + \frac{(r)_5}{6} B_5 n^{r-5} - \ldots$$

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, $B_7 = \frac{1}{30}$, $B_9 = \frac{5}{66}$, $B_{11} = \frac{691}{2730}$ etc. die Bernoullischen Zahlen.

Setzt man in:

$$\frac{1}{r+1} - \frac{1}{2} + \frac{(r)_1}{2} B_1 - \frac{(r)_3}{4} B_3 + \frac{(r)_5}{6} B_5 \ldots - (-1)^{\alpha} \frac{(r)_{2\alpha-1}}{2\alpha} B_{2\alpha-1} = 0$$

für r der Reihe nach 2, 4, 8, 10 etc., so erhält man Gleichungen zur Bestimmung von B_1, B_3, B_5 . . . . .

11. Für ein ohne Ende wachsendes n ist

$$\lim \left(\sum_{x=1}^{x=n} \frac{x}{n^2} \right) = \tfrac{1}{2}, \lim \left(\sum_{x=1}^{x=n} \frac{x^2}{n^3} \right) = \tfrac{1}{3}, \ldots \lim \left(\sum_{x=1}^{x=n} \frac{x^r}{n^{r+1}} \right) = \frac{1}{r+1}$$

12. Wenn $\frac{x}{n} = \Delta x$ und n ohne Ende wächst:

$$\lim \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (\mu \Delta x)^r \Delta x \right) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

13. $$\lim \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} [a + a_1 \mu \Delta x + a_2 (\mu \Delta x)^2 \ldots a_r (\mu \Delta x)^r] \Delta x \right) =$$

$$a x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_r x^{r+1}}{r+1}$$

14. Für $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ist

$$\lim \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} f(\mu \Delta x) \Delta x \right) = \frac{x}{6} \left[f(0) + 4 f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x) \right].$$

Interpolation.

I. Bei gleichen Intervallen.

1. Sind in der Reihe

$y_0, y_1, y_2 \cdots y_n$ die Argumente der Reihe nach $x_0, x_0 + w, x_0 + 2w + \cdots x_0 + nw$, so ist, wenn $r \leqq n$

$$y_r = y_0 + r \Delta y_0 + (r)_2 \Delta^2 y_0 + (r)_3 \Delta^3 y_0 + \ldots$$

Die Zahl w heisst das Intervall der Reihe. Nimmt man die Zahlen, zwischen welchen eine gesuchte Zahl liegt als y_0 und y_1, so ist r immer ein echter Bruch. Ist $rw = x$,

$$\text{so ist } r = \frac{x}{w}$$

2. Interpolation bei Reihen in welchen die ersten Differenzen an einer Stelle nahe gleich sind.

Nach Nr. 1 ist:

$$y_r = y_0 + r \Delta y_0 = y_0 + x \cdot \frac{\Delta y_0}{w} = y_0 + x \cdot s.$$

$s = \frac{\Delta y_0}{w}$ ist die Differenz für eine Einheit des Intervalls.

Hat man eine Tabelle der Sinus von Minute zu Minute, so ist für $w = 60$, $\frac{\Delta y_0}{w}$ die Differenz für eine Sekunde.

Wenn y_r gegeben ist, so hat man:

$$x = \frac{y_r - y_0}{s}.$$

3. Interpolation bei Reihen in welchen die zweiten Differenzen an einer Stelle nahe gleich sind:

$$y_r = y_0 + \frac{x \Delta y_0}{w} - \frac{x(w-x)}{2w^2} \cdot \Delta^2 y_0 \text{ oder,}$$

$$y_r = y_0 + x \cdot s - \frac{x(w-x)}{2w} \cdot \Delta s.$$

Setzt man bei gegebenen y_r

$x_1 = (y_r - y_0)\frac{w}{\Delta y_0}$, so ist, wenn $\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}$ klein ist,

angenähert: $x = x_1 + \frac{x_1(w-x_1)}{2w} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0}$.

4. Wenn $y_0, y_1, y_2 \cdots y_{r-1}, y_{r+1} \cdots y_n$ gegeben und y_r gesucht wird. Man entwickle y_r aus

$$y_n - n y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} \cdots \pm n y_1 \mp y_0 = 0$$

Gegeben y_0 und y_2, gesucht y_1:

$$y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}$$

Gegeben y_0, y_1, y_3, gesucht y_2:

$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{3}(y_3 - y_0)$$

Gegeben y_0, y_1, y_3, y_4, gesucht y_2:

$$y_2 = \frac{4(y_1 + y_3) - (y_0 + y_4)}{6}$$

5. Fehlen in der Reihe $y_0, y_1, y_2 \cdots y_{n+1}$, die Glieder y_r und y_s, dann bestimme man dieselben aus

$$y_n - n y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} \cdots \pm y_0 = 0 \text{ und}$$
$$y_{n+1} - n y_n + (n)_2 y_{n-1} \pm y_1 = 0$$

II. Bei ungleichen Intervallen.

$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ entsprechen
$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$

1. Newton'sche Interpolationsmethode.

$$y_x = y_0 + A_0(x - x_0) + A_1(x - x_0)(x - x_1) + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

Wenn $A_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ etc.

$$A_1 = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}, \; B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}, \text{ etc.}$$

$$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}, \text{ etc.}$$

2. Die Lagrange'sche Interpolationsmethode.

$$y_x = A_0\, y_0 + A_1\, y_1 + A_2\, y_2 \ldots A_n\, y_n$$

Wenn $A_0 = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots}$

$$A_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}$$

$$A_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_r = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots}{(x_r-x_0)\quad\ldots\quad(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots}$$

3. Ist $y_x = A_0\, y_0 + A_1\, y_1 + A_2\, y_2$, so ist der Werth von x für welchen y_x ein Maximum oder Minimum ist gegeben durch:

$$x = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} y_0 & x^2_0 & 1 \\ y_1 & x^2_1 & 1 \\ y_2 & x^2_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Graphische Interpolation.

Man construire für ein rechtwinkliges Coordinaten-System die Punkte: (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3)\ldots(x_n, y_n)$ und construire eine Curve, welche sich dem durch diese Punkte bestimmten Polygon so nahe wie möglich anschmiegt, welches am besten mit einem biegsamen Lineale geschieht. Für jedes x erhält man als zugehörige Ordinate das entsprechende y_x. Als Längeneinheit nimmt man für jede Axe eine beliebige Länge, am bequemsten so, dass die Curve ganz innerhalb eines Quadrats liegt.

Die geometrischen Progressionen.

Die Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots . aq^{n-1}$

1. $z = aq^{n-1}$

2. $s = \dfrac{qz-a}{q-1} = \dfrac{a(q^n-1)}{q-1}$

3. Wenn $q < 1$ und $n = \infty$

$$s = \frac{a}{1-q}$$

Unendliche Reihen.

$$S = y_1 + y_2 + y_3 \ldots y_n + y_{n+1} \ldots\ldots$$
$$R_n = y_{n+1} + y_{n+2} \ldots\ldots$$

I. Die Reihe ist divergent,
   1. wenn y_n mit wachsendem n nicht den Grenzwerth Null hat.
   2. wenn R_n mit wachsendem n nicht den Grenzwerth Null hat.

II. Die Reihe ist convergent,
   1. wenn von einem bestimmten Gliede an die Glieder abnehmen und abwechselnde Vorzeichen haben.

2. wenn ihre Glieder von irgend einer Stelle an kleiner sind als die Glieder einer als convergent bekannten Reihe.

3. wenn $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ mit wachsendem n sich einer Zahl kleiner als 1 nähert.

4. wenn $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$, dann convergirt die Reihe, wenn die Reihe $y_1 + 2y_2 + 4y_4 + 8y_8 + 16y_{16} + \ldots$ convergirt.

5. wenn $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n^r + A_1 n^{r-1} + A_2 n^{r-2} \ldots A_r}{n^r + a_1 n^{r-1} + a_2 n^{r-2} \ldots a_r}$, r eine ganze positive Zahl, dann convergirt die Reihe, wenn die erste der Differenzen $a_1 - A_1$, $a_2 - A_2 \ldots$, welche nicht Null ist, positiv und grösser als 1 ist, in allen andern Fällen ist die Reihe divergent.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

Eine stetige Function von x kann nur auf eine Art in eine convergirende, nach aufsteigenden ganzen Potenzen von x geordnete Reihe entwickelt werden.

Wenn $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 \ldots$. und beide Reihen convergent, so ist

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3 \text{ etc.}$$

Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten.

1. $(1+x)^n = 1 + (n)_1 x + (n)_2 x^2 + (n)_3 x^3 + \ldots 1 > x > -1$

2. $$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - + \ldots (-1)^r \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2r} x^r + \ldots$$

3. $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2r} x^r + \ldots$$

Die Exponentialreihen und Logarithmen.

1. $$a^x = 1 + \frac{x \log n a}{1} + \frac{(x \log n a)^2}{2!} + \frac{(x \log n a)^3}{3!} + \ldots$$

2. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

3. $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$

4. $$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},\ \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

5. Wenn $\cos x = y$, $e^{xi} = y + i\sqrt{1-y^2}$, $x = \frac{1}{i}\log n\,(y + i\sqrt{1-y^2})$

6. Wenn $\sin x = y$, $e^{-xi} = \sqrt{1-y^2} - iy$, $x = i\log n\,(\sqrt{1-y^2} - iy)$

7. Wenn $\cos x + i \sin x = y$, also $xi = \log n\, y$, dann ist

$$\sin x = \frac{y^2-1}{2yi},\quad \cos x = \frac{y^2+1}{2y},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{(1-y)\,i}{1+y}\quad \text{und}$$

$$\log n\, y = i \operatorname{arc\,sin}\frac{y^2-1}{2yi} = i \operatorname{arc\,cos}\frac{y^2+1}{2y} = 2i \operatorname{arc\,tg}\frac{(1-y)\,i}{1+y}$$

8. Wenn $\operatorname{tg} x = y$, $e^{2xi} = \frac{1+iy}{1-iy}$ und $x = \frac{1}{2i}\log n\,\frac{1+iy}{1-iy}$

9. $\log n\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots.\quad 1 \geqq x > -1$

10. $\log n\,(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots.\quad 1 > x > -1$

11. $\log n\,\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots.)\quad 1 > x > -1$

12. $\log_n (a+x) = \log n\, a + 2\left(\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \ldots.\right)$

Die hyperbolischen Functionen.

1. $e^x = \mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x$, $e^{-x} = \mathfrak{Cof}\,x - \mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$

2. $\mathfrak{Cof}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. $\mathfrak{Cof}\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots. = \mathfrak{Cof}\,(-x)$

4. $\mathfrak{Sin}\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots. = -\mathfrak{Sin}\,(-x)$

5. $\mathfrak{Tg}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x}$, $\mathfrak{Cotg}\,x = \frac{\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}$, $\mathfrak{Sec}\,x = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,x}$, $\mathfrak{Cosec}\,x = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}$

6. $\mathfrak{Cof}\,(x \pm y) = \mathfrak{Cof}\,x\,\mathfrak{Cof}\,y \pm \mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Sin}\,y$

7. $\mathfrak{Sin}\,(x \pm y) = \mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cof}\,y \pm \mathfrak{Cof}\,x\,\mathfrak{Sin}\,y$

8. $\mathfrak{Tg}\,(x \pm y) = \frac{\mathfrak{Tg}\,x \pm \mathfrak{Tg}\,y}{1 \pm \mathfrak{Tg}\,x\,\mathfrak{Tg}\,y}$

9. $\mathfrak{Cof}\,2x = \mathfrak{Cof}^2 x + \mathfrak{Sin}^2 x$, $\mathfrak{Sin}\,2x = 2\,\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cof}\,x$

10. $\mathfrak{Cof}\,2x = \frac{1+\mathfrak{Tg}\,x^2}{1-\mathfrak{Tg}\,x^2}$, $\mathfrak{Sin}\,2x = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,x}{1-\mathfrak{Tg}\,x^2}$

11. $\mathfrak{Cof}\,x + 1 = 2\,\mathfrak{Cof}^2\frac{x}{2}$, $\mathfrak{Cof}\,x - 1 = 2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{2}$

12. $\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,x - 1}{\mathfrak{Cof}\,x + 1}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x + 1} = \frac{\mathfrak{Cof}\,x - 1}{\mathfrak{Sin}\,x}$

13. $\mathfrak{Cof}\,3x = 4\,\mathfrak{Cof}^3 x - 3\,\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,3x = 4\,\mathfrak{Sin}^3 x + 3\,\mathfrak{Sin}\,x$

14. $\mathfrak{Cof}\left(x \pm \frac{\pi}{2} i\right) = \pm i\,\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Sin}\left(x \pm \frac{\pi}{2} i\right) = \pm i\,\mathfrak{Cof}\,x$

15. $\mathfrak{Cof}\,(x \pm \pi i) = -\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,(x \pm \pi i) = -\mathfrak{Sin}\,x$

16. $\mathfrak{Cof}\,(x \pm \frac{3}{2}\pi i) = \mp i\,\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,(x \pm \frac{3}{2}\pi i) = \mp i\,\mathfrak{Cof}\,x$

17. $\mathfrak{Cof}\,(x \pm 2n\pi i) = \mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,(x \pm 2n\pi i) = \mathfrak{Sin}\,x$

18. $\mathfrak{Cof}\,x = \cos xi$, $\mathfrak{Sin}\,x = -i \sin xi$

19. Wenn $\mathfrak{Cof}\,x = \sec\varphi$, so ist $\mathfrak{Sin}\,x = \operatorname{tg}\varphi$, also

$$e^x = \mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x = \sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

mithin $$x = \operatorname{logn}\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

20. Wenn $\mathfrak{Sin}\,x = y$ so ist: $\mathfrak{Cof}\,x = \sqrt{1+y^2}$ und
$e^x = \sqrt{1+y^2} + y$, also $x = \operatorname{logn}\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)$

21. $\mathfrak{Cof}\,x = y$ giebt $\mathfrak{Sin}\,x = \sqrt{y^2-1}$ mithin
$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ und $x = \operatorname{logn}\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$

22. Wenn $\mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x = y$, also $x = \operatorname{logn} y$, so ist
$\mathfrak{Sin}\,x = \frac{y^2-1}{2y}$, $\mathfrak{Cof}\,x = \frac{y^2+1}{2y}$, $\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{2} = \frac{y-1}{y+1}$ und
$\operatorname{logn} y = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y^2-1}{2y} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{y^2+1}{2} = 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{y-1}{y+1}$

23. $\mathfrak{Tg}\,x = y$, so ist $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ und $x = \frac{1}{2}\operatorname{logn}\frac{1+y}{1-y}$

24. Für kleine Werthe von x hat man:
$x = \mathfrak{Sin}\,x\,\sqrt[3]{\mathfrak{Sec}\,x}$ und $x = \mathfrak{Tg}\,x\,\sqrt[3]{\mathfrak{Cof}^2 x}$ und hieraus

25. $\log x = \log\mathfrak{Sin}\,x - \frac{1}{6}\log\mathfrak{Cof}\,x$; $\log\mathfrak{Sin}\,x = \log x + \frac{1}{6}\log\mathfrak{Cof}\,x$

26. $\log x = \log\mathfrak{Tg}\,x + \frac{1}{3}\log\mathfrak{Cof}\,x$; $\log\mathfrak{Tg}\,x = \log x - \frac{1}{3}\log\mathfrak{Cof}\,x$

Gleichungen.

1) Einfache Gleichungen.

$x + b = a$ giebt $x = a - b$
$x - b = a$ - $x = a + b$
$bx = a$ - $x = \frac{a}{b}$
$\frac{x}{b} = a$ - $x = ab$
$x^n = a$ - $x = \sqrt[n]{a}$ x hat n Werthe
$\sqrt[n]{x} = a$ - $x = a^n$

Bei den einfachen Gleichungen gilt, dass die Zahl, welche mit der Unbekannten verbunden ist, durch die entgegengesetzte Operation auf die andere Seite kommt.

2. Umformung oder Ordnen der Gleichungen. Zur Lösung einer

Gleichung schafft man zuerst die Brüche fort, indem man beide Seiten derselben mit dem Generalnenner multiplicirt, ferner schafft man durch Potenzirung die Wurzeln fort, mit welchen die Unbekannten behaftet sind, und endlich ordnet man die Gleichung nach Potenzen der Unbekannten. Der höchste Exponent der Unbekannten bestimmt den Grad der Gleichung. Bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist der Grad der Gleichung die Summe der Exponenten im höchsten Gliede.

Eine Gleichung, welche sich nicht nach Potenzen der Unbekannten ordnen lässt, heisst transcendent. Die einfachste transcendente Gleichung ist:

$$a^x = b \text{ und hieraus: } x \log a = \log b.$$

3. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

A. Die Combinationsmethode. Man entwickelt aus jeder Gleichung dieselbe Unbekannte und verbindet die erhaltenen Ausdrücke zu je zwei durch das Gleichheitszeichen.

B. Die Substitutionsmethode. Man entwickelt aus einer Gleichung eine Unbekannte und setzt den gefundenen Ausdruck in die anderen Gleichungen ein.

C. Die Additions- oder Subtractionsmethode. Man macht bei zwei Gleichungen die Coefficienten derselben Unbekannten durch Multiplication der Gleichungen mit entsprechenden Zahlen einander gleich und addirt die Gleichungen, wenn die gleich gemachten Coefficienten ungleiche, und subtrahirt dieselben, wenn diese Coefficienten gleiche Vorzeichen haben.

D. Die Methode der Multiplicatoren. Man multiplicirt die Gleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren α_1, α_2, α_3 . . . und bestimmt dieselben so, dass nach der Addition aller Gleichungen die Coefficienten der Unbekannten bis auf einen Null werden. Haben die Gleichungen n Unbekannte, so wird die Lösung derselben hierdurch zurückgeführt auf die Lösung von Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten. Die Determinanten geben ein Mittel, die Unbekannten Multiplicatoren sofort aus den Coefficienten der Unbekannten anzugeben.

Zur Erläuterung: Gegeben die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$\text{Combinationsmethode: } \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2}$$

$$\text{Substitutionsmethode: } \frac{a_2 (c_1 - b_1 y)}{a_1} + b_2 y = c_2$$

Additions- oder Subtractionsmethode:

$$\begin{array}{l|l} a_1 x + b_1 y = c_1 & a_2 \text{ Factor für die erste Gleichung} \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & a_1 \text{ - - - - zweite -} \end{array}$$

Sind a_1 und a_2 nicht relative Primzahlen und v das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben, dann sind die Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{v}{a_1}$ und $\frac{v}{a_2}$ zu multipliciren.

Methode der Multiplicatoren. Die Gleichungen seien:

$$1.\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$2.\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$3.\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

Aus $D = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ und

$$0 = b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$0 = c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

sieht man, dass α_1, α_2, α_3 [man sehe die Determinanten Seite 79] der Reihe nach die Factoren der Gleichungen 1, 2 und 3 sind, wenn x gefunden werden soll. Es ist:

$$x \cdot D = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{\Sigma \pm d_1 b_2 c_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3} \text{ und ebenso } y = \frac{\Sigma \pm a_1 d_2 c_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3},\ z = \frac{\Sigma \pm a_1 b_2 d_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3}$$

Für die oben behandelte Gleichung mit zwei Unbekannten hat man

$$x = \frac{\Sigma \pm c_1 b_2}{\Sigma \pm a_1 b_2} \qquad y = \frac{\Sigma \pm a_1 c_2}{\Sigma \pm a_1 b_2}$$

Für die Gleichungen mit mehreren Unbekannten lassen sich nun sofort die Werthe für die einzelnen Unbekannten darstellen.

Proportionen.

1. $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ oder $a : \alpha = b : \beta$
2. $a\beta = b\alpha$, $a = \frac{b\alpha}{\beta}$, $\beta = \frac{b\alpha}{a}$, $\alpha = \frac{a\beta}{b}$, $b = \frac{a\beta}{\alpha}$
3. $\frac{an}{\alpha} = \frac{bn}{\beta}$ oder $\frac{an}{\alpha n} = \frac{b}{\beta}$
4. $\frac{a : n}{\alpha} = \frac{b : n}{\beta}$ oder $\frac{a : n}{\alpha : n} = \frac{b}{\beta}$
5. $\frac{a^n}{\alpha^n} = \frac{b^n}{\beta^n}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\alpha}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{\beta}}$
6. Wenn $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ und $\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{b_1}{\beta_1}$, so ist

$$\frac{a a_1}{\alpha \alpha_1} = \frac{b b_1}{\beta \beta_1} \text{ und } \frac{a : a_1}{\alpha : \alpha_1} = \frac{b : b_1}{\beta : \beta_1}$$

7. Wenn $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \ldots = k$, so ist auch

$$\frac{an + bm + cp + \cdots}{\alpha n + \beta m + \gamma p + \cdots} = k$$

8. Aus $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ folgt nach (7)

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{a+b}{\alpha+\beta} = \frac{a-b}{\alpha-\beta} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a-\alpha}{b-\beta}$$

Theilungsrechnung.

1. Es sei $x + y + z + u \cdots = S$ und

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{aS}{a+b+c+d}, \; y = \frac{bS}{a+b+c+d} \text{ etc.}$$

2. Wenn $x + y + z + u = S$ und

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{y}{b} \\ \frac{x}{c} &= \frac{z}{d} \\ \frac{z}{f} &= \frac{u}{g} \end{aligned}\right\} \text{ dann ist } x = \frac{cz}{d}, \text{ also}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{cz}{ad},$$

$$z = \frac{fu}{g} \text{ und } \frac{cz}{ad} = \frac{fcu}{adg}, \text{ mithin}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{cz}{ad} = \frac{fcu}{adg} \text{ oder auch}$$

$$\frac{x}{acf} = \frac{y}{bcf} = \frac{z}{adf} = \frac{u}{adg} \text{ etc.}$$

Allgemeines arithmetisches Mittel.

(Durchschnittsrechnung.)

Wenn a_1 das Gewicht α_1 hat,
a_2 „ „ α_2
. . . . . .
a_n „ „ α_n; das mittlere Gewicht von
$a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n$ sei α, so ist

$$\alpha = \frac{a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 \ldots . a_n\,\alpha_n}{a_1 + a_2 \ldots . a_n}$$

Gleichungen zweiten Grades.

1. Die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ giebt

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

2. Der Ausdruck $u = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ist rational in Bezug auf x, wenn $B^2 = 4AC$.

3. Der Ausdruck $u = Ax^2 + Bx + C$ ist gleich $A(x - x_1)(x - x_2)$ wenn x_1 und x_2 die in (1) gefundenen Werthe haben.

4. $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$, $x_1 x_2 = \frac{C}{A}$

Gleichungen dritten Grades.

1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Man setze: $x = y - \frac{a}{3}$, $3p = f'\left(-\frac{a}{3}\right)$; $2q = -f\left(-\frac{a}{3}\right)$, so ist

$$y^3 = 3py + 2q$$

Setzt man $y = u + v$ und $u^3 + v^3 = 2q$, so wird $uv = p$ und hieraus $u = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, $v = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, und

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}(u - v)\sqrt{3},$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}(u - v)\sqrt{3}$$

y_2 und y_3 sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 + y_1 y + y_1^2 = 3p.$$

$U = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ist gleich

$$A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$ wenn

x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung

$$U = 0$$ sind.

2. Auflösung der cubischen Gleichungen mit Hülfe der Kreis- und der hyperbolischen Functionen.

p	q	φ	y_1	y_2	y_3
$p>0$	>0	$\mathfrak{Cof}\,\varphi=\frac{q}{\sqrt{p^3}}$	$2\sqrt{p}\,\mathfrak{Cof}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}+i\sqrt{3p}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}-i\sqrt{3p}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varphi}{3}$
$p>0$	<0	$\mathfrak{Cof}\,\varphi=\frac{-q}{\sqrt{p^3}}$	$-2\sqrt{p}\,\mathfrak{Cof}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}+i\sqrt{3p}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}-i\sqrt{3p}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varphi}{3}$
$p<0$	$\gtrless 0$	$\mathfrak{Sin}\,\varphi=\frac{q}{\sqrt{(-p)^3}}$	$2\sqrt{-p}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}+i\sqrt{-3p}\,\mathfrak{Cof}\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}-i\sqrt{-3p}\,\mathfrak{Cof}\frac{\varphi}{3}$
$p>0$	$\gtrless 0$	$\cos\varphi=\frac{q}{\sqrt{p^3}}$	$2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}+\sqrt{3p}\sin\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{y_1}{2}-\sqrt{3p}\sin\frac{\varphi}{3}$

Gleichungen vierten Grades.

1. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Man setze $x = y - \frac{a}{4}$

$p = \frac{1}{2}f''\left(-\frac{a}{4}\right)$, $q = f'\left(-\frac{a}{4}\right)$, $r = f\left(-\frac{a}{4}\right)$, so wird

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

Sind z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)\,z - q^2 = 0$$ dann ist

$2y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$, $2y_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$

$2y_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$, $2y_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$

Wenn $q > 0$ und $\sqrt{z_1}$ positiv, so muss $\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = \frac{q}{\sqrt{z_1}} > 0$

und wenn

$q < 0$ und $\sqrt{z_1}$ „ „ „ $\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = \frac{q}{\sqrt{z_1}} < 0$

2. Wenn $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ und ebenso

$u^3 - au^2 - 4cu + 4ac - b^2 = 0$, so ist

$$y^2 + y\sqrt{u - a} = \frac{1}{2}\left(-u + \frac{b}{\sqrt{u-a}}\right)$$

$$y^2 - y\sqrt{u - a} = \frac{1}{2}\left(-u - \frac{b}{\sqrt{u-a}}\right)$$

3. Ist $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4ex + d = 0$, so bilde man:

$(x^2 + 2ax + b + 2y)^2 - (2px + q)^2 = 0$, alsdann ist

$p^2 = a^2 - b + y$; $q^2 = (2y + b)^2 - d$; $pq = ab - e + 2ay$

und $(a^2 - b + y)((2y + b)^2 - d) = (ab - e + 2ay)^2$, so wie

$y^3 = (b^2 - ac + \frac{1}{4}(d - b^2))y + \frac{1}{4}((ab - c)^2 - (a^2 - b)(b^2 - d))$.

Bezeichnen p_1, p_2, p_3 die den Werthen y_1, y_2, y_3 entsprechenden Werthe von p, so ist:

$x_1 = p_1 + p_2 + p_3 - a$; $x_3 = -p_1 + p_2 - p_3 - a$ und

$x_2 = p_1 - p_2 - p_3 - a$; $x_4 = -p_1 - p_2 + p_3 - a$.

Da man q stets positiv nehmen kann, so bestimmt sich das Vorzeichen von p, aus: $pq = ab - c + 2ay$.

In den meisten Fällen werden sich die Wurzeln bequemer aus der folgenden Gleichung ergeben.

$$x^2 + 2ax + b + 2y = \pm\left(2x\sqrt{a^2 - b + y} + \frac{ab - c + 2ay}{\sqrt{a^2 - b + y}}\right)$$

Höhere Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. Wenn $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \ldots A_{n-1}x + A_n = 0$ die Wurzeln x_1, x_2, x_3 $\ldots$ x_n hat, dann ist

$f(x) = A_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$ und es ist

$$\overset{1}{C}(x_1 x_2 \dots x_n) = -\frac{A_1}{A_0}$$

$$\overset{2}{C}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{A_2}{A_0}$$

$$\overset{3}{C}(x_1 x_2 \dots x_n) = -\frac{A_3}{A_0}$$

$$\overset{r}{C}(x_1 x_2 \dots x_n) = (-1)^r \frac{A_r}{A_0} \text{ und}$$

$$\overset{n}{C}(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{A_n}{A_0}$$

2. Setzt man in $f(x) = 0$, $\frac{y}{p}$ für x, dann hat man die Glieder der Gleichung der Reihe nach mit $1, p, p^2, p^3 \dots p^n$ zu multipliciren.

3. Setzt man py für x, dann hat man die Glieder von $f(x)$ der Reihe nach durch $1, p, p^2 \dots p^n$ zu dividiren.

4. Eine Gleichung ungeraden Grades hat wenigstens eine reelle Wurzel, das Zeichen derselben ist das entgegengesetzte von A_n.

5) Eine Gleichung vom Grade $2n$, in welcher A_{2n} negativ ist, hat eine positive und eine negative reelle Wurzel.

6. Eine Gleichung hat höchstens so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens so viele negative als Zeichenfolgen. Die fehlenden Glieder sind durch ± 0 zu ergänzen.

7. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat zwischen den Grenzen x_1 und x_2 so viele Wurzeln, als Zeichenwechsel bei $f(x)$ zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ vorkommen.

8. Wenn $f(x)$ auf die Form:

$$R_n (x-\alpha)^n + R_{n-1} (x-\alpha)^{n-1} \dots R_1 (x-\alpha) + R = 0$$

gebracht wird und $R, R_1, R_2 \dots R_n$ sind alle positiv, so ist α eine obere Grenze der positiven Wurzeln.

9. Wird $f(-x)$ auf diese Form gebracht und findet für die R das eben Gesagte statt, so ist α die untere Grenze für die negativen Wurzeln.

10. Setzt man in $f(x)$ für x, $\frac{1}{x}$ und $-\frac{1}{x}$, so erhält man wie oben die untere Grenze der positiven und die obere Grenze der negativen Wurzeln.

11. Aufsuchung der rationalen Wurzeln. Ist α ein Factor von A_n, dann ist α eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, wenn

$$\frac{A_n}{\alpha} + A_{n-1} = Q_1, \quad \frac{Q_1}{\alpha} + A_{n-2} = Q_2, \quad \frac{Q_2}{\alpha} + A_{n-3} = Q_3 \dots$$

$$\frac{Q_{r-1}}{\alpha} + A_{n-r} = Q_r, \quad Q_n = 0$$

wird. Sobald eine der Zahlen Q keine ganze Zahl wird, so ist α keine Wurzel der Gleichung.

12. Irrationale Wurzeln.

Wenn x_1 und x_2 ein Paar Näherungswerthe sind, siehe $N(7)$, dann ist angenähert

$$\frac{x-x_1}{f(x_1)} = \frac{x-x_2}{f(x_2)} = -\frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)} \text{ Regula falsi.}$$

Diese Regel ist besonders brauchbar bei transcendenten Gleichungen.

13. Newton's Näherungsmethode.

Wenn eine Wurzel zwischen x_1 und x_1+1 liegt, also in $f(x)=f(x_1+h)=0$, h ein ächter Bruch ist, so ist angenähert

$$A) \quad f(x_1)+hf'(x_1)=0; \text{ ebenso}$$

$$B) \quad f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{2}f''(x_1)=0$$

Aus diesen Gleichungen findet man angenähert h. Aus A ist

$$h=-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

14. Verbesserte Newton'sche Methode.

Wenn x zwischen x_1 und x_2 liegt, also $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x=x_1$ bis $x=x_2$, so ist, bei gleichen Vorzeichen von $f'(x)$ und $f''(x)$

$$A) \quad \frac{x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} < x < x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ und}$$

bei ungleichen Vorzeichen von $f'(x)$ und $f''(x)$

$$B) \quad x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x < \frac{x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}.$$

15. Horners Methode.

Aus der Gleichung

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\ldots A_n=0$$

bilde man, wenn α ein Näherungswerth und $\alpha+1>x>\alpha$ ist:

$R_n(x-\alpha)^n+R_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}\ldots R_1(x-\alpha)+R=0$ (S. Seite 82).

Man setze

$$\frac{R}{R_1}=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{\beta}{10}$$

Nun bilde man

$$R'_n\left(x-\alpha-\frac{\beta}{10}\right)^n+R'_{n-1}\left(x-\alpha-\frac{\beta}{10}\right)^{n-1}\ldots R'_1\left(x-\alpha-\frac{\beta}{10}\right)+R'=0$$

Haben nun R'_1 und R' gleiche Vorzeichen, so ist β zu gross gewählt, man hat dasselbe alsdann zu vermindern.

Man setze nun $\frac{R'}{R'_1} = \frac{\gamma}{100}$ und verfahre wie oben.

Die $R'\ R''\ R'''$ etc. werden sich der Null immer mehr und mehr nähern und man erhält:

$$x = a + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} \ldots$$

16. Hat eine Gleichung die Wurzel $a + bi$, so ist auch $a - bi$ eine Wurzel derselben.

17. Wenn die Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$, r gleiche Wurzeln a hat, so ist auch a eine Wurzel der Gleichung $D^p f(x) = 0$, wobei für p alle ganzen Zahlen von 1 bis $r-1$ zu setzen sind.

Die reciproken Gleichungen.

1. $x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} + \ldots A_n x^{n+1} + A_n x^n + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$
2. $x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} \ldots A_n x^{n+1} - A_n x^n \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$
3. $x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} \ldots 0 \cdot x^n \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$
4. $x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} \ldots + A_n x^n + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$

Diese Gleichungen lassen sich alle auf die Form unter (4) zurückführen und zwar (1) durch Division mit $x + 1$, (2) durch Division mit $x - 1$, und endlich (3) durch Division mit $x^2 - 1$.

5. Wird die Gl. (4) durch x^n dividirt, so entsteht

$$x^n + \frac{1}{x^n} + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0$$

Setzt man für $x + \frac{1}{x}$, z, so ist

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,\quad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z,\quad x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2,$$

wodurch die Gleichung (4) vom $2n^{ten}$ Grad auf den n^{ten} Grad zurückgeführt ist.

Die reinen Gleichungen n^{ten} Grades.

1. $x^n = a$ giebt, wenn $x = y\sqrt[n]{a}$ gesetzt wird

$y^n = 1$, also $y = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2p\pi}{n} + i\sin\frac{2p\pi}{n}$, wobei für p alle ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ zu setzen sind. Setzt man $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$, so ist $\sqrt[n]{1} = \varepsilon^{2p}$.

2. $x^n = -a$ giebt, wenn $x = y\sqrt[n]{a}$ gesetzt wird

$y^n = -1$, also $y = \sqrt[n]{-1} =$

$\cos\frac{(2p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2p+1)\pi}{n} = \varepsilon^{2p+1}$, p wie in No. 1.

Die Vergleichung der Grössen mittelst der Zahl und die bürgerlichen Rechnungsarten.

1. Im Folgenden werden unter den grossen lateinischen Buchstaben stets Grössen und unter den griechischen Buchstaben Zahlen verstanden; die Einheiten werden immer mit e, e_1, e_2 etc. bezeichnet.

Ist $A = \alpha \cdot e$, so heisst A durch e gemessen (αe) eine benannte Zahl.

Zwei oder mehrere Grössen heissen gleichartig, wenn sie durch irgend ein gemeinschaftliches e gemessen gedacht werden können.

2. Ist $A = \alpha e$, so ist auch $\mu A = (\mu\alpha) \cdot e$ und $\frac{A}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu} \cdot e$.

3. Sind $A = \alpha \cdot e$, $B = \beta \cdot e$, $C = \gamma \cdot e$ etc., so ist auch

$$A \pm B \pm C \cdots = (\alpha \pm \beta \pm \gamma \cdots)\, e \text{ und}$$

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} \cdots$$

4. Nach 3 ist $A = \frac{\alpha}{\beta} B = \frac{\alpha}{\gamma} C$ etc., d. h. A ist durch B, C etc. gemessen. Ist hierbei $\frac{\alpha}{\beta}$ rational, so heissen A und B commensurabel, dagegen incommensurabel, wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ irrational ist.

5. Ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} \cdots = \frac{\alpha}{\beta}$, so stehen die Grössen in Proportion. Eine Unbekannte kann dann stets aus drei gegebenen Grössen gefunden werden (regula de tri, gerade und umgekehrte).

6. Ist das Verhältniss $\frac{A}{B}$ bedingungsweise ausgedrückt durch die Verhältnisse $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$ etc., so dass:

$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ wenn $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$ etc.

$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ wenn $\alpha_1 = \beta_1$; $\alpha_3 = \beta_3$ etc.

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \text{ wenn } \alpha_1 = \beta_1 ; \alpha_2 = \beta_2 \text{ etc.}$$

. . . . . so muss

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots} \text{ sein.}$$

(Zusammengesetzte regula de tri).

7. Ist eine Grösse $A = \varepsilon \cdot e$ zu verwandeln in eine Grösse $X = \xi \cdot e_n$, deren verschiedene Einheiten verknüpft sind durch ein vollständiges System von Gleichungen, so dass:

$$\beta \cdot e = \gamma \cdot e_1 ; \delta e_1 = \varepsilon e_2 ; \zeta e_2 = \eta e_3 \text{ etc. } \mu \cdot e_{n-1} = \nu e_n,$$

so ist: $\frac{\xi A}{X} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \varepsilon \eta \cdot \cdots \cdot \nu}{\beta \delta \zeta \cdot \cdots \cdot \mu}$. (Kettenregel).

8. Soll eine Grösse S in die Theile A, B, C, D zerlegt werden, so dass diese Theile sich verhalten wie die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so hat man, wenn $\alpha + \beta + \gamma \ldots = \sigma$

$$A = \frac{S}{\sigma} \cdot \alpha, \; B = \frac{S}{\sigma} \cdot \beta, \; C = \frac{S}{\sigma} \cdot \gamma \text{ etc.}$$

(Gesellschafts- oder Repartitionsrechnung)

9. Bezeichnen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ die Einheitswerthe von verschiedenen Grössen und mischt man davon $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ solcher Einheiten so ist der Einheitswerth der Mischung

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 \cdots \varepsilon_n \alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots \alpha_n}.$$

(Mischungs- oder Alligationsrechnung).

Für zwei Grössen ist: $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ und dann

$$\frac{\alpha_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon} = \frac{\alpha_2}{\varepsilon - \varepsilon_1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

10. $\frac{p}{100} A$ heisst p Procent $(p\,\%)$ von A.

11. Einfache Zinsen. A das ausgeliehene Kapital, p die Procente, n die Jahre, Z die Zinsen:

$$Z = \frac{Apn}{100}.$$

12. Kapital mit Zins. Disconto.

$$Z + A = W.$$

$$W = A + \frac{Apn}{100} = \frac{A(100 + pn)}{100}$$

13. Zins auf Zinsrechnung.

$\frac{100+p}{100} = q$ der Zinsfuss. W der Endwerth des Kapitals nach n Jahren.

$$W = Aq^n, \quad \log W = \log A + n \log q.$$

14. Rentenrechnung. Wenn B Thaler jährlich zugelegt oder fortgenommen werden bei p % Zinseszinsen, W der Endwerth, so ist nach n Jahren

$$W = Aq^n \pm \frac{B(q^n-1)}{q-1}.$$

Bei der eigentlichen Rentenrechnung ist nach n Jahren, $W = o$, also: $Aq^n = \frac{B(q^n-1)}{q-1}$. B die Rente, A der Werth der Rente.

15. Sind einzelne Summen zu zahlen:

K_1 nach n_1; K_2 nach n_2, $\cdots$ K_m nach n_m Zeiteinheiten, so kann ohne Nutzen und Schaden die ganze Summe $K_1 + K_2 \cdots K_m$ gezahlt werden nach:

$$n = \frac{K_1 n_1 + K_2 n_2 \cdots K_m n_m}{K_1 + K_2 \cdots K_m}$$ solcher Zeiteinheiten.

(Mittlerer Zahlungstermin).

Goniometrie.

Die Functionen in den vier Quadranten und Grundgesetze.

1. $\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$
2. $\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$ $\quad 90 > \alpha > 0$
3. $\cos\alpha = -\cos(180-\alpha) = -\sin(\alpha-90)$
4. $\sin\alpha = \sin(180-\alpha) = \cos(\alpha-90)$ $\quad 180 > \alpha > 90$
5. $\cos\alpha = -\cos(\alpha-180) = -\sin(270-\alpha)$
6. $\sin\alpha = -\sin(\alpha-180) = -\cos(270-\alpha)$ $\quad 270 > \alpha > 180$
7. $\cos\alpha = \cos(360-\alpha) = \sin(\alpha-270)$
8. $\sin\alpha = -\sin(360-\alpha) = -\cos(\alpha-270)$ $\quad 360 > \alpha > 270$
9. $\cos(360 \cdot n + \alpha) = \cos\alpha$,
10. $\sin(360\, n + \alpha) = \sin\alpha$, n eine ganze Zahl.
11. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
12. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
13. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
14. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
15. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1$
16. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
17. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
18. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
19. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
20. $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Zahlenwerthe einiger Functionen.

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60	120	135	150
cos	$+1$	0	-1	0	$+1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
sin	0	$+1$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	∞	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
cotg	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
sec	1	∞	-1	∞	$+1$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
cosec	∞	$+1$	∞	-1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2

Eine Function ausgedrückt durch die andere.

1. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
2. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$
4. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Formeln, in welchen zwei Winkel vorkommen.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
4. $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$
5. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$
6. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$
7. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
8. $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$
9. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
10. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
11. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
12. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
13. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
14. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
15. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
16. $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = -\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
17. $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
18. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
19. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\sin\alpha + \sin\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
20. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\cos\alpha - \cos\beta) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
21. $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha - \cos\beta) = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
22. $(\cos\alpha - \cos\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
23. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$
24. $(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) : (\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) = \sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$
25. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$
26. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

Zahlenwerthe einiger Functionen.

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60	120	135	150
cos	$+1$	0	-1	0	$+1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
sin	0	$+1$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	∞	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
cotg	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
sec	1	∞	-1	∞	$+1$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
cosec	∞	$+1$	∞	-1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2

Eine Function ausgedrückt durch die andere.

1. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
2. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$
4. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Formeln, in welchen zwei Winkel vorkommen.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
4. $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$
5. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$
6. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$
7. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
8. $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$
9. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
10. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
11. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
12. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
13. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
14. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
15. $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
16. $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
17. $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
18. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
19. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\sin\alpha + \sin\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
20. $(\sin\alpha - \sin\beta) : (\cos\alpha - \cos\beta) = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
21. $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha - \cos\beta) = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
22. $(\cos\alpha - \cos\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta) = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
23. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$
24. $(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) : (\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta) = -\sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta)$
25. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$
26. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

Formeln, in welchen ein Winkel, oder ein Winkel und der Winkel von 45° vorkommt.

1. $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

2. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

3. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

4. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - (n)_3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + (n)_5\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$

5. $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

6. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

7. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$

8. $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - (n)_2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + (n)_4\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$

9. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

10. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

11. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha - \mathrm{cotg}\,\alpha$

12. $\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha$

13. $\mathrm{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)$

14. $\mathrm{cotg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)$

15. $\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\,(45+\alpha)$

16. $\frac{1+\mathrm{cotg}\,\alpha}{1-\mathrm{cotg}\,\alpha} = \mathrm{cotg}\,(\alpha - 45)$

17. $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ 18. $\mathrm{cotg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$

19. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 20. $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}}$

Potenzen von sinus und cosinus.

$$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$$
$$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$$
$$8\cos^4\alpha = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$$
$$16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$$
$$32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10$$
$$64\cos^7\alpha = \cos 7\alpha + 7\cos 5\alpha + 21\cos 3\alpha + 35\cos\alpha$$
$$128\cos^8\alpha = \cos 8\alpha + 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha + 56\cos 2\alpha + 35$$
$$2\sin^2\alpha = -\cos 2\alpha + 1$$
$$4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha$$
$$8\sin^4\alpha = \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3$$
$$16\sin^5\alpha = \sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha$$
$$32\sin^6\alpha = -\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha - 15\cos 2\alpha + 10$$
$$64\sin^7\alpha = -\sin 7\alpha + 7\sin 5\alpha - 21\sin 3\alpha + 35\sin\alpha$$
$$128\sin^8\alpha = \cos 8\alpha - 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha - 56\cos 2\alpha + 35$$

Formeln zwischen drei Winkeln, deren Summe 180° beträgt.

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
2. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
3. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
4. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$
5. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$
6. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$
8. $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$

Reihen und Produkte.

1. $$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) \ldots \sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$
2. $$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) \ldots \cos(\alpha+n\beta) = \frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$

$= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$

4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$= \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots$

5. $\operatorname{tg} x = 2^2(2^2-1)\frac{B_1}{2!}x + 2^4(2^4-1)\frac{B_3}{4!}x^3 + 2^6(2^6-1)\frac{B_5}{6!}x^5 + \cdots$

$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \cdots \quad \pi > x > -\pi$

6. $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}\left(1 - 2^2\frac{B_1}{2!}x^2 - 2^4\frac{B_3}{4!}x^4 - 2^6\frac{B_5}{6!}x^6 - \cdots\right)$

$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \cdots\right) \quad \pi > x > -\pi$

$B_1\ B_3, B_5 \ldots$ Bernouillische Zahlen (Seite 85)

7. $x = \sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 x}{7} + \cdots$

8. $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \cdots \quad \operatorname{tg} x \leqq 1.$

9. Aus 3 und 4 ist angenähert: $x = \sin x \sqrt[3]{\sec x}$.

Formeln zur Berechnung der Functionen kleiner Winkel.

Es bezeichnet k die Zahl $\log \frac{1}{\text{arc } 1'} = 3{,}5363$

und $dE \log\cos\alpha = 10 - \log\cos\alpha = \log\sec\alpha$. α' die Minutenzahl eines Winkels.

1. $\log\sin\alpha' = \log\alpha' - (k + \frac{1}{3}dE\log\cos\alpha)$
2. $\log\alpha' = \log\sin\alpha' + k + \frac{1}{3}dE\log\cos\alpha$
3. $\log\operatorname{tg}\alpha' = \log\alpha' - (k - \frac{2}{3}dE\log\cos\alpha)$
4. $\log\alpha' = \log\operatorname{tg}\alpha' + k - \frac{2}{3}dE\log\cos\alpha$

Gleichungen zwischen den Arcus der verschiedenen Functionen.

1. $\operatorname{arc}\sin u = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

2. $\operatorname{arc}\cos u = \operatorname{arc}\sin\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$

3. $\operatorname{arc\,tg}\, u = \operatorname{arc\,sin}\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\dfrac{1}{u}$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\dfrac{2u}{1+u^2} = \operatorname{arc\,cos}\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

4. $\operatorname{arc\,sin} u \pm \operatorname{arc\,sin} v = \operatorname{arc\,sin}\left(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}\right)$

$= \operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp u\,v\right)$

5. $\operatorname{arc\,cos} u \pm \operatorname{arc\,cos} v = \operatorname{arc\,sin}\left(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}\right)$

$= \operatorname{arc\,cos}\left(u\,v \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\right)$

6. $\operatorname{arc\,tg} u \pm \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{u \pm v}{1 \mp u\,v}$

Allgemeine Gesetze der ebenen Trigonometrie.

I. Das rechtwinklige Dreieck.

a, b, c die Seiten und α, β, γ die Gegenwinkel derselben, beim rechtwinkligen Dreieck, γ der rechte Winkel, f die Fläche, r der Radius des umschriebenen und ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises.

$2s = a + b + c$, also s der halbe Umfang.

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha \qquad \frac{c}{b} = \sec\alpha \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$a = c\sin\alpha = b\operatorname{tg}\alpha$$

$$b = c\cos\alpha = a\operatorname{cotg}\alpha$$

$$c = a\operatorname{cosec}\alpha = b\sec\alpha$$

$$f = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\operatorname{cotg}\alpha}{2} = \frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$$

2. Das gleichschenklige Dreieck.

a die Grundlinie, b der Schenkel, h die Höhe.

$$\frac{a:2}{b} = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{h}{b} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{a:2}{h} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{b}{a:2} = \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{b}{h} = \sec\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{h}{a:2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{a}{2} = b\sin\frac{\alpha}{2} = h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$h = b\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$b = \frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} = h\sec\frac{\alpha}{2}$$

$$f = \frac{a}{2}\cdot h = \frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2\sin\alpha}{2}$$

3. Das schiefwinklige Dreieck.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \quad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a}$$

$$f = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \varrho^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \varrho\cdot s = \frac{abc}{4r}$$

Formeln zur Berechnung der Stücke ebener Figuren.

1. Das rechtwinklige Dreieck.

Ausser den schon angeführten Bezeichnungen ist noch: h die Höhe zur Hypotenuse, u und v die Projectionen von a und b auf c.

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a^2 = c\cdot u, \quad b^2 = c\cdot v, \quad h^2 = u\cdot v$$

$$2f = ab = hc, \quad h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Berechnungen.

A. Wenn gegeben a und b, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = 90 - \alpha, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} \text{ oder } c = b\sec\alpha$$

$$f = \frac{ab}{2}$$

B. Wenn gegeben a und c, so ist

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = 90 - \alpha$$

$$h = \frac{a\sqrt{(c+a)(c-a)}}{c}, \quad f = \frac{a\sqrt{(c+a)(c-a)}}{2}$$

C. Wenn gegeben c und α, oder c und β

$$a = c \sin \alpha \text{ oder } a = c \cos \beta$$
$$b = c \sin \beta \text{ oder } b = c \cos \alpha$$
$$h = \frac{c \sin 2\beta}{2} = \frac{c \sin 2\alpha}{2}, \quad f = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4} = \frac{c^2 \sin 2\beta}{4}$$

D. Wenn gegeben ist a und α oder a und β.

$$c = a \operatorname{cosec} \alpha \text{ oder } c = a \sec \beta$$
$$b = a \operatorname{cotg} \alpha \text{ oder } b = a \operatorname{tg} \beta$$
$$h = a \cos \alpha \text{ oder } h = a \sin \beta$$
$$f = \frac{a^2}{2} \operatorname{cotg} \alpha \text{ oder } f = \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \beta$$

2. Das gleichschenklige Dreieck.

A. Gegeben a und b.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \beta = \frac{a}{2b}$$
$$h = \frac{\sqrt{(2b + a)(2b - a)}}{2}, \quad f = \frac{a}{4}\sqrt{(2b + a)(2b - a)}$$

B. Gegeben a und α.

$$b = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}, \quad \beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$$
$$h = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \quad f = \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

C. Gegeben a und β.

$$b = \frac{a}{2} \sec \beta, \quad \frac{\alpha}{2} = 90 - \beta$$
$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta, \quad f = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \beta$$

D. Gegeben b und α.

$$a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$$
$$h = b \cos \frac{\alpha}{2}, \quad f = \frac{b^2 \sin \alpha}{2}$$

E. Gegeben b und β.

$$a = 2b \cos \beta, \quad \frac{\alpha}{2} = 90 - \beta$$
$$h = b \sin \beta, \quad f = \frac{b^2 \sin 2\beta}{2}$$

3. Das schiefwinklige Dreieck.

Wenn x die Projection von b auf c ist, so ist, je nachdem $\alpha >$ oder $< 90^0$ ist, $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cx$; h die Höhe auf a, so ist $f = \frac{ah}{2}$ und $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $\varrho = \frac{f}{s}$; $r = \frac{abc}{4f}$

5. Das Trapez.

a und b die beiden parallelen Seiten, c und d die nicht parallelen Seiten, h die Höhe, α und β die an a liegenden Winkel, α an c. p und q die Diagonalen, φ der zwischen ihnen liegende Winkel, F der Inhalt und f der Inhalt des Δ aus $a - b$, c und d.

1. $$F = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)f}{a-b} = \frac{(a+b)c\sin\alpha}{2} = \frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{pq\sin\varphi}{2} = ah - \frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

2. $$a = \frac{2F-bh}{h} = \frac{2F}{c\sin\alpha} - b = \frac{2(F+h^2)\sin\alpha\sin\beta}{h}$$
$$= b + \frac{c\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

3. $$c = \frac{2F}{(a+b)\sin\alpha} = \frac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

4. $$h = c\sin\alpha = d\sin\beta = \frac{2F}{a+b}$$

6. Das Viereck im Kreise.

Die Seiten a, b, c d, $\alpha = \angle(a, b)$, β, γ, δ folgen in der Reihenfolge der Seiten, p und q die Diagonalen, q geht durch α,

$$\frac{a+b+c+d}{2} = s, \quad \frac{b+c+d-a}{2} = s-a \text{ etc.: Inhalt } F,$$

φ Winkel zwischen p und q.

1. $$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0$$

2. $$pq = ac + bd, \quad \frac{q}{p} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$$

3. $$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \frac{(c^2-a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}$$
$$= \frac{(ab+cd)\sin\alpha}{2} = \frac{(bc+ad)\sin\beta}{2} = \frac{pq\sin\varphi}{2}$$

4. $$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{ac+bd}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}}{4F}$$

5. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$$

6. $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-d)}}$$

7. Das Trapezoid.

Die Bezeichnungen wie beim Viereck im Kreise.

1. $F = \frac{1}{2}[ab \sin \alpha + bc \sin \beta - ac \sin(\alpha + \beta)]$
$= \frac{1}{2}[ad \sin \delta + cd \sin \gamma - ac \sin(\delta + \gamma)]$
$= \dfrac{a^2 \sin \alpha \sin \delta - c^2 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \delta)}$
$= \frac{1}{2}(ab \sin \alpha + cd \sin \gamma) = \dfrac{pq \sin \varphi}{2}$
$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$
2. $a = b \cos \alpha - c \cos(\alpha + \beta) + d \cos(\alpha + \beta + \gamma)$
3. $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + 2bc \cos \beta + 2bd \cos(\beta + \gamma) + 2cd \cos \gamma$
4. Ist m die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen, so ist
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4m^2$

8. Die regulären Vielecke im Allgemeinen.

Bezeichnen r, r_1 die grossen, ϱ, ϱ_1 die kleinen Radien und a, a_1 die Seiten eines regulären nEcks und $2n$Ecks in demselben Kreise, so ist

1. $r^2 = \varrho^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, 2. $a_1^2 = 2r(r - \varrho)$
3. $2\varrho_1^2 = r(r + \varrho)$ 4. $ar = 2a_1\varrho_1$ oder
$ur = u_1\varrho_1$, wenn u und u_1 die Perimeter der Vielecke sind
5. $ur = v\varrho$, wenn v der Umfang des umschriebenen nEcks ist.
6. $a = 2r \sin \dfrac{\varphi}{2} = 2\varrho \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$; $\left(\varphi = \dfrac{360}{n}\right)$
7. $r = \dfrac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \dfrac{\varrho}{\cos \frac{\varphi}{2}}$
8. $\varrho = \dfrac{a}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{\varphi}{2} = r \cos \dfrac{\varphi}{2}$
9. $F = \dfrac{nr^2 \sin \varphi}{2} = \dfrac{na^2}{4} \operatorname{cotg} \dfrac{\varphi}{2} = n\varrho^2 \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$

9. Reguläre Vielecke von bestimmter Seitenzahl.

1. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3r}{2} = 3\varrho$$

$$r = \tfrac{2}{3}h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2\varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$a = \tfrac{2}{3} h\sqrt{3} = 2\varrho\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} = 3\varrho^2\sqrt{3}$$

2. Viereck.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$a = r\sqrt{2} = 2\varrho$$

$$F = a^2 = 2r^2 = 4\varrho^2$$

3. Fünfeck.

$$r = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \varrho(\sqrt{5}-1)$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{r}{4}(1+\sqrt{5})$$

$$a = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2\varrho\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$F = \frac{5a^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 5\varrho^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

4. Sechseck.

$$r = a = \tfrac{2}{3}\varrho\sqrt{3}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$a = r = \tfrac{2}{3}\varrho\sqrt{3}$$

$$F = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}r^2\sqrt{3} = 2\varrho^2\sqrt{3}$$

5. Achteck.

$$r = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = 2\varrho\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(1+\sqrt{2}) = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$a = r\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\varrho(\sqrt{2}-1)$$

$$F = 2a^2(1+\sqrt{2}) = 2r^2\sqrt{2} = 8\varrho^2(\sqrt{2}-1)$$

6. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \varrho\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = 2\varrho\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$F = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

$$\frac{r-a}{a} = \frac{a}{r},\quad \left(a+\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Das Quadrat der Zehnecksseite plus dem Quadrat des Radius ist gleich dem Quadrat der Fünfecksseite.

7. Zwölfeck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \varrho(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3}) = \frac{r}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\varrho(2-\sqrt{3})$$

$$F = 3a^2(2+\sqrt{3}) = 3r^2 = 12\varrho^2(2-\sqrt{3})$$

Die sphärische Trigonometrie.

α, β, γ die Seiten, A, B, C ihre Gegenwinkel.

A. Das rechtwinklige Dreieck. $C = 90^0$.

1. $\sin\alpha = \sin A \sin\gamma$
   $\sin\beta = \sin B \sin\gamma$
   $\cos A = \cos\alpha \sin B$
   $\cos B = \cos\beta \sin A$
   $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta$.

2. $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg} B$
   $\sin\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg} A$
   $\cos A = \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma$
   $\cos B = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\gamma$
   $\cos\gamma = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$.

3. Die Napier'schen Regeln.

Schreibt man die Stücke: γ, B, $90-\alpha$, $90-\beta$, A, der Reihe nach in die Peripherie eines Kreises, so ist der Cosinus eines dieser Stücke gleich dem Produkt der Cotangenten der Nachbarstücke und gleich dem Produkt der Sinus der beiden andern Stücke.

4. Ist γ sehr klein, so ist:

$$\alpha = \gamma \sin A \text{ und } \beta = \gamma \sin B.$$

B. Das schiefwinklige Dreieck.

λ_1, λ_2 λ_3 die Höhen zu α, β, γ.

$\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$, $A + B + C = 180 + 2E$, $2E$ heisst der sphärische Excess.

1. $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$

. . . . . .

2. $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha$

. . . . . .

3. $\dfrac{\sin \alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin \beta}{\sin B} = \dfrac{\sin \gamma}{\sin C}$ oder auch

$$\sin B \sin \gamma = \sin C \sin \beta = \sin \lambda_1$$
$$\sin A \sin \gamma = \sin C \sin \alpha = \sin \lambda_2$$
$$\sin A \sin \beta = \sin B \sin \alpha = \sin \lambda_3.$$

4. $\sin \alpha \cos B = \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos A$
$\sin \alpha \cos C = \cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta \cos A$

. . . . . .

5. $\sin A \cos \beta = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$
$\sin A \cos \gamma = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos \alpha$

. . . . . .

6. $\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} \beta \sin \gamma - \cos \gamma \cos A$
$\sin A \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta - \cos \beta \cos A$

. . . . . .

7. $\sin \alpha \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} B \sin C + \cos C \cos \alpha$
$\sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} C \sin B + \cos B \cos \alpha$

. . . . . .

8. Sind α_1, β_1, γ_1, A_1, B_1, C_1 Seiten und Winkel eines zweiten Dreiecks und ist:

$\alpha + A_1 = \beta + B_1 = \gamma + C_1 = 180^0$, sowie
$\alpha_1 + A = \beta_1 + B = \gamma_1 + C = 180^0$, so heisst dieses Dreieck das Polar-Dreieck des ersten.

9. Sind $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, ΔA, ΔB, ΔC zusammengehörige kleine Aenderungen der Seiten und Winkel, so ist

$$\Delta\alpha = \cos C \Delta\beta + \cos B \Delta\gamma + \sin \lambda_1 \Delta A$$
$$\Delta\beta = \cos A \Delta\gamma + \cos C \Delta\alpha + \sin \lambda_2 \Delta B$$
$$\Delta\gamma = \cos B \Delta\alpha + \cos A \Delta\beta + \sin \lambda_3 \Delta C$$

10. $\sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$.

$\cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$

$\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha)}}$

11. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A-E)}{\sin B \sin C}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B \sin C}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin E \sin(A-E)}{\sin(B-E)\sin(C-E)}}$

12. Die Gauss'schen Gleichungen.

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C}{2}.$$

13. Die Napierschen Analogien.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

14. Zur Vergleichung des sphärischen Dreiecks mit dem rechtwinklig ebenen Dreieck.

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} = \left(\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\sin^2\frac{C}{2} = \left(\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

15. In jedem sphärischen Dreieck ist die Summe je zweier Seiten grösser als die dritte, und die Summe zweier Winkel kleiner als 180° plus dem dritten Winkel.

16. In jedem sphärischen Dreieck liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber, gleichen Seiten gleiche Winkel, dem grössern Winkel liegt die grössere Seite gegenüber, der grössern Seite der grössern Winkel.

17. Ist in einem sphärischen Dreieck die Summe zweier Seiten $> = \text{oder} < 180°$
so ist auch die Summe der Gegenwinkel $> = \text{oder} < 180°$.

18. Liegt ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel vom Radius r, so ist die Fläche desselben:

$f = r^2 (A + B + C - \pi) = 2r^2 E$, wobei A, B, C die arcus der Winkel bezeichnen. Zur Bestimmung von E hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\sigma - \alpha) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\sigma - \beta) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\sigma - \gamma)}.$$

19. Ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel vom Radius r kann, wenn die Seiten nur einige Grade betragen, als ein ebenes berechnet werden, dessen Seiten die Längen

r arc α, r arc β und r arc γ haben und dessen Winkel

$$A - \frac{2E}{3},\ B - \frac{2E}{3} \text{ und } C - \frac{2E}{3} \text{ sind.}$$

C. Berechnungen.

1. Gegeben α, β und γ. Die Winkel ergeben sich aus No. 10 in *B*.
2. Gegeben A, B und C. Die Seiten ergeben sich aus No. 11 in *B*.
3. Gegeben α, β und A, $\sin \alpha > \sin \beta$.

$$\sin B = \frac{\sin A \sin \beta}{\sin \alpha};\ B \text{ ist mit } \beta \text{ zugleich } > \text{ oder } < 90^0$$

$$\sin (C + x) = \frac{\operatorname{tg} \beta \sin x}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ wenn } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} A \cos \beta;\ \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \sin C}{\sin A}.$$

$$\cos (\gamma - y) = \frac{\cos \alpha \cos y}{\cos \beta}, \text{ wenn } \operatorname{tg} y = \cos A \operatorname{tg} \beta;\ \sin C = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Hat man B bestimmt, so lassen sich zur Berechnung von $\frac{C}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ auch die Napier'schen Analogien benutzen.

4. Gegeben A, B und α, $\sin A > \sin B$.

$$\sin \beta = \frac{\sin B \sin \alpha}{\sin A},\ \beta \text{ mit } B \text{ zugleich } > \text{ oder } < 90^0$$

$$\sin (\gamma - x) = \frac{\operatorname{tg} B \sin x}{\operatorname{tg} A}, \text{ wenn } \operatorname{tg} x = \cos B \operatorname{tg} \alpha;\ \sin C = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$\sin (C - y) = \frac{\cos A \sin y}{\cos B}, \text{ wenn } \operatorname{cotg} y = \operatorname{tg} B \cos \alpha;\ \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \sin C}{\sin A}.$$

$\frac{C}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ auch wie in No. 3.

5. Gegeben α, B und C.

Man bestimme mit Hülfe der Napier'schen Analogien $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ und $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$; der fehlende Winkel wird mit Hülfe der Gauss'schen Gleichungen bestimmt, oder man berechne x und y aus

$\operatorname{cotg} x = \cos \alpha \operatorname{tg} B$ und $\operatorname{cotg} y = \cos \alpha \operatorname{tg} C$, so ist

$$\cos A = \frac{\cos B \sin (C - x)}{\sin x} = \frac{\cos C \sin (B - y)}{\sin y}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos x}{\cos (C - x)},\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos y}{\cos (B - y)}.$$

6. Gegeben A, β und γ.

Man bestimme $\frac{1}{2}(B+C)$ und $\frac{1}{2}(B-C)$ und a wie in No. 5, oder man berechnet x und y aus:

$$\operatorname{tg} x = \cos A \operatorname{tg} \beta \text{ und } \operatorname{tg} y = \cos A \operatorname{tg} \gamma, \text{ so ist:}$$

$$\cos a = \frac{\cos \beta \cos (\gamma - x)}{\cos x} = \frac{\cos \gamma \cos (\beta - y)}{\cos y}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A \sin x}{\sin (\gamma - x)}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A \sin y}{\sin (\beta - y)}.$$

Stereometrie.

1. Würfel. a die Kante, d die Diagonale, V der Inhalt, O die Oberfläche:

$$V = a^3, \quad O = 6a^2, \quad d^2 = 3a^2$$

2. Prisma. g die Grundfläche, h die Höhe:

$$V = gh$$

3. Rechtwinkliges Parallelepipedon. a, b, c die in einer Ecke zusammentreffenden Kanten, d die Diagonale:

$$V = abc, \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

4. Schiefabgeschnittenes dreiseitiges Prisma. a, b, c die ∦ Kanten, f der Inhalt des zu den Kanten normalen Querschnitts:

$$V = \frac{(a+b+c)f}{3}$$

Das $n$seitige schiefabgeschnittene Prisma ist durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen zu zerlegen. Ist bei einem $n$seitigen schiefabgeschnittenen Prisma, f der zu den Kanten normale Querschnitt, und bezeichnet l die Entfernung der Schwerpunkte der Grundflächen, so ist: $V = fl$.

5. Cylinder. $V = gh$.

6. Gerader Cylinder. r der Radius der Grundfläche, d der Durchmesser, M der Mantel, O die Oberfläche.

$$V = r^2 \pi h = \frac{d^2 \pi}{4} h \quad M = 2r\pi h = d\pi h = \frac{2V}{r} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{hV}$$

$$= \tfrac{1}{2} r M = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M^2}{h}, \quad O = (r+h) d\pi$$

7. Hohlcylinder. ϱ Radius der Höhlung, $r - \varrho = e$, $r + \varrho = 2y$

$$V = (r^2 - \varrho^2)\pi h = (r+\varrho)(r-\varrho)\pi h = 2y\pi he$$

8. Schiefabgeschnittener Cylinder. a und b die grösste und kleinste Seitenlinie.

$$V = \frac{r^2 \pi (a+b)}{2} = \frac{d^2 \pi (a+b)}{8}$$

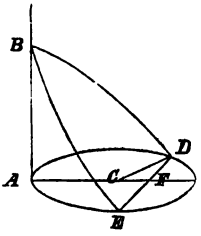
$$M = r(a+b)\pi = \frac{d\pi(a+b)}{2}$$

Gilt nur für den geraden Cylinder.

9. Cylinderabschnitt, Schnittebene ⫫ der Axe, und Cylinderausschnitt. Volumen, Grundfläche mal Höhe. (Siehe Kreis.)

10. Hufförmiger Abschnitt.

$AC = r$, $AB = h$, $AF = a$, $DF = b$, $\angle ACD = \varphi$



in Theilen des Radius für den Radius 1, also arc φ.

$$V = \frac{h}{3a}\left[b(3r^2 - b^2) + 3r^2(a - r)\varphi\right]$$

$$M = \frac{2hr}{a}\left[(a - r)\varphi + b\right]$$

Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt der Grundfläche, dann ist $a = b = r$ und

$$V = \tfrac{2}{3}r^2 h, \quad M = 2rh$$

Dieser Körper lässt sich nach der Simpsonschen Regel berechnen.

Körper mit veränderlichen Durchschnittsflächen.

1. Grundfläche g, Endfläche ⫫ der Grundfläche e, Mittelfläche m. Durchschnittsfläche in der Höhe x, gleich y.

Wenn $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \ldots$ dann ist das Volumen des Körpers von der Höhe x

$$V = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \frac{a_3 x^4}{4} \text{ und auch}$$

$$V = \frac{x}{6}(g + 4m + e) \quad \text{Simpson'sche Regel.}$$

2. Wenn $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, und y_1 die Durchschnittsfläche in der Höhe x_1 ist, während $l = x - x_1$ und $x_1 - l = d$, ist

$$4m = 4y_1 - \left(\frac{y_1 - g}{x_1} + \frac{e - y_1}{l}\right) d \text{ und}$$

$$V = \frac{x}{6}\left[g + 4y_1 + e - \left(\frac{y_1 - g}{x_1} + \frac{e - y_1}{l}\right) d\right]$$

In dieser Form ist die Formel besonders anwendbar bei Erdarbeiten.

3. Die Pyramide. Ein Schnitt y ⫫ der Grundfläche im Abstande x von der Spitze ist $\sim$ der Grundfläche. Ist h die ganze Höhe und g die Grundfläche, so hat man

$$y = \frac{g x^2}{h^2}; \quad V_{(x)} = \frac{y x}{3}; \quad V = \frac{g h}{3}$$

$V_{(x)}$ und V sind ähnliche Pyramiden:

$$\frac{V_{(x)}}{V} = \frac{x^3}{h^3}$$

4. Parallel abgekürzte Pyramide, h die Höhe, x die Höhe der Ergänzungspyramide.

$$\frac{x}{\sqrt{e}} = \frac{x+h}{\sqrt{g}} = \frac{h}{\sqrt{g}-\sqrt{e}}; \quad 2\sqrt{m} = \sqrt{g}+\sqrt{e}$$

$$V = \frac{h}{6}(g+4m+e) = \frac{h}{3}(g+\sqrt{ge}+e)$$

5. Sind die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide l, die Grundkanten a, b und c, so ist

$$h = \sqrt{l^2-r^2}; \quad r = \frac{abc}{4f}, \quad f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

6. Sind p, q und t die Kanten einer Ecke und α, β, γ die Winkel zwischen denselben, so ist

$$V = \tfrac{1}{3}pqt\cdot\sqrt{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}$$

7. Kegel: $V = \frac{gh}{3}$; wenn die Grundfläche ein Kreis:

$$V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{d^2\pi h}{12}$$

Mantel des geraden Kegels:

$$M = r\pi l, \text{ wenn } l = \sqrt{r^2+h^2}$$

8. Parallel abgekürzter Kegel. Die Radien r und ϱ:

$$V = \frac{h\pi}{6}[r^2+(r+\varrho)^2+\varrho^2] = \frac{h\pi}{3}(r^2+r\varrho+\varrho^2)$$

Der Mantel, wenn der Kegel ein gerader ist:

$$M = (r+\varrho)\pi l; \quad l = \sqrt{(r-\varrho)^2+h^2}$$

9. Der Kegelhuf, die Schnittfläche ∥ zur Seite.

Die Höhe des Hufes p, $u = \frac{2rp}{h}$, $y = \sqrt{2ru-u^2}$, so ist

$$V = \frac{h}{9}\left[3r^2\arccos\frac{r-u}{r} - \left(3r+u-\frac{2u^2}{r}\right)y\right]$$

$$M = rl\left(\arccos\frac{r-u}{r} - \frac{(3r-u)y}{3r^2}\right)$$

10. Der Kegelhuf, die Schnittfläche senkrecht zur Grundfläche des Kegels. Der Radius des Kegels in der Höhe des Scheitels der Schnittfläche sei ϱ, so ist

$$V = \frac{h}{3}\left[r^2\arccos\frac{\varrho}{r} - 2b\varrho + \frac{\varrho^3}{r}\operatorname{logn}\left(\frac{r+b}{\varrho}\right)\right], \quad b = \sqrt{r^2-\varrho^2}$$

$$M = l\left(r\arccos\frac{\varrho}{r} - \frac{b\varrho}{r}\right)$$

11. Prismoïde, Körper, deren Eckpunkte in zwei ⫫ Ebenen, den Grundflächen, liegen, deren Seitenflächen also Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme oder windschiefe Flächen sind.

Das Volumen eines Prismoïds wird nach der Simpsonschen Regel berechnet.

12. Der Obelisk ist ein Prismoïd mit lauter ebenen Begränzungsflächen. Die Höhe h, a und b ein Paar entsprechende Seiten der Grundflächen, z die gleichliegende Seite des ⫫ zur Grundfläche im Abstande x geführten Durchschnitts, so ist $z = b + (a - b)\frac{x}{h}$

Sind die Grundflächen Trapeze mit den Mittellinien p und p_1 und den Höhen α und α_1, dann ist nach der Simpson'schen Regel

$$V = \frac{h}{6}[p\alpha + (p + p_1)(\alpha + \alpha_1) + p_1\alpha_1]$$

Diese Formel gilt auch für Obelisken, deren Grundflächen Rechtecke von den Seiten p, p_1 und α, α_1 sind.

13. Ein Prismoïd von ebenen Figuren und einer windschiefen Fläche begrenzt. Die Grundflächen seien Trapeze und stehen auf einer Seitenfläche senkrecht.

Die Grundfläche g hat die ⫫ Seiten a und b und die Höhe p
p und q sind die ⫫ Seiten der Seitenfläche, auf welcher g und e senkrecht stehen, und die Höhe h dieses Trapezes ist auch die Höhe des Körpers.

$$V = \frac{h}{12}[(a + b)p + (a + b + c + d)(p + q) + (c + d)q]$$

Wenn $p = q$, so ist

$$V = \frac{hp}{4}(a + b + c + d) = \frac{g(a + b + c + d)}{4}$$

Für $a = c$ und $b = d$

$$V = \frac{h}{4}(a + b)(p + q)$$

Diese Körper kommen häufig bei Erdarbeiten vor, die Grundflächen stehen dann vertical.

14. Die Kugel.

$$V = \tfrac{4}{3}r^3\pi = \frac{\pi}{6}d^3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{O^3} = \tfrac{1}{3}Or$$

$$O = 4r^2\pi = d^2\pi = \sqrt[3]{36\pi} \cdot \sqrt[3]{V^2} = \frac{3V}{r}$$

$$r = \frac{d}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{O} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[3]{V} = \frac{3V}{O}$$

$$d = 2r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{O} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\sqrt[3]{V}$$

15. Kugelabschnitt. h die Höhe, a der Radius der Grundfläche.

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h) = \frac{h\pi}{6}(3a^2 + h^2);\quad a^2 = h(2r - h)$$

Calotte: $C = 2r\pi h$

16. Kugelzone. a und b die Radien, h die Höhe.

$$4m = (2a^2 + 2b^2 + h^2)\pi$$

$$V = \frac{h\pi}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2) = \frac{(a^2 + b^2)\pi h}{2} + \frac{h^3\pi}{6}$$

Mantel $M = 2r\pi h$; $r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2 + h^2 - a^2}{2h}\right)^2}$

17. Kugelausschnitt: $V = \frac{2}{3} r^2 \pi h$

h ist die Höhe des zugehörigen Abschnitts.

18. Der Ring, welcher entsteht, wenn von der Zone in No. 16 der abgekürzte Kegel mit den Radien a und b und der Höhe h fortgenommen wird. l die Seiten des Kegels.

$$V = \frac{l^2 h\pi}{6}$$ und wenn $a = b$, also $h = l$ ist,

$$V = \frac{h^3\pi}{6}$$

Umdrehungskörper.

A. Allgemeine Gesetze (Güldin'sche Regeln).

1. Dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, welche die Figur nicht schneidet, aber wohl begrenzen kann, so ist der Inhalt V des Rotationskörpers gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte f der erzeugenden Figur und dem Umfange des Kreises, welchen der Schwerpunkt dieser Figur beschreibt. Wenn x der Abstand des Schwerpunkts von der Axe ist, dann hat man

$$V = 2x\pi f$$

2. Die Oberfläche des Rotationskörpers ist gleich dem Product aus dem Umfange u der Figur und dem Umfange des Kreises, welchen der Schwerpunkt derselben beschreibt. Ist y der Abstand des Schwerpunkts von der Axe, dann hat man

$$O = 2y\pi u$$

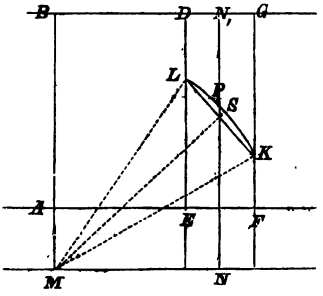
Es ist nicht nöthig den Schwerpunkt der ganzen Figur f oder des Umfangs u zu berechnen, wenn man die Lage der Schwerpunkte der einzelnen Theile kennt.

3. Sind V_1 und O_1 der Inhalt und die Oberfläche eines Rotationskörpers und V und O die durch dieselbe Fläche f und den Umfang u erzeugten Inhalte bei Drehung um eine Axe, welche von der ersten Axe den Abstand d hat, dann ist

$$V = 2d\pi f \pm V_1 \text{ und } O = 2d\pi u \pm O_1$$

je nachdem die Fläche oder Linie ganz ausserhalb oder ganz zwischen den parallelen Axen liegt.

B. Körper, welche durch Drehung einer ebenen Figur entstehen, wenn eine Begrenzungslinie ein Kreisbogen ist.



$LE = a$, $KF = b$, $AE = c$,
$EF = h$, $DL = a_1$, $GK = b_1$
$\angle LMN = \alpha$, $\angle KMN = \beta$

$$MA = p = \frac{(2c+h)h}{2(a-b)} - \frac{a+b}{2}$$

$$p + a = \frac{(2c+h)h}{2(a-b)} + \frac{a-b}{2}$$

$$ML = MK = r = \sqrt{c^2 + (p+a)^2}$$

$LK = s$, das Segment üb. $LK = f$,

$$MS = l = \frac{s^3}{12f}, \quad \sin\alpha = \frac{a+p}{r},$$

$$\sin\beta = \frac{b+p}{r}$$

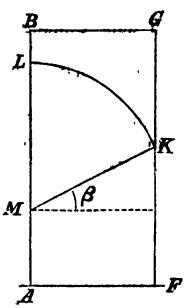
$SN = l \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = g$, $a + a_1 + p - g = g_1$

V der Inhalt des Körpers, welcher durch Drehung von $EFKPL$ um EF, und V_1 Inhalt des Körpers, welcher durch Drehung von $DGKPL$ um DG entsteht.

$$V = \frac{h\pi}{3}(a^2 + ab + b^2) + 2(g-p)\pi f$$

$$V_1 = \frac{h\pi}{3}(a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2) - 2g_1\pi f$$

Specielle Fälle. Wenn $c = 0$ und A unterhalb M liegt, p also negativ wird.



$$p = \frac{a+b}{2} - \frac{h^2}{2(a-b)}$$

$$a - p = r = \frac{h^2}{2(a-b)} + \frac{a-b}{2}$$

$\alpha = 90^0$ $\quad \cos\beta = \frac{h}{r}$

Wenn $\beta = 0$, also $h = r$ ist,

$$V = pr\pi\left(p + \frac{r\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}r^3$$

$$V_1 = b_1 r\pi\left(b_1 - \frac{r\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}r^3\pi$$

Diese Formeln finden Anwendung bei der Berechnung der Geschützröhre und der Geschosse.

Formeln zur Berechnung der Inhalte der Gewölbe.

Tonnengewölbe.

1. Gedrücktes. a die Spannweite, h die Höhe, b der Bogen, a_1 die Länge, r der Radius, α der Centriwinkel, $r - \varrho = h$, M die innere Fläche, V der Gewölberaum.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{2h}{a}$, $r = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}$, $b = r \arc \alpha$ (Näherungsformeln siehe Kreis)

$M = a_1 b$

$V = \frac{r^2 a_1}{2}(\arc \alpha - \sin \alpha) = \frac{a_1}{2}(br - a\varrho)$

$h = r$ giebt den Halbcylinder.

2. Gothisches.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2h}{a},\ r = \frac{a}{4} + \frac{h^2}{a},\ \varrho = r - \frac{a}{2},\ b = r \arc \alpha$$

$M = 2 a_1 b$

$V = \frac{a_1 r^2}{2}(2 \arc \alpha - \sin 2\alpha) = a_1 (br - h\varrho)$

3. Zur Berechnung anderer Tonnengewölbe benutze man die Näherungsformeln für bestimmte Integrale. Besonders brauchbar ist die Simpson'sche Regel.

4. Wird ein Tonnengewölbe in der Richtung der Diagonalen der Grundebene durch Ebenen zerschnitten, welche senkrecht zur Grundebene stehen, dann heissen die Theile, welche nach der Stirnfläche zu liegen, Gewölbekappen, und die Theile, welche an der Widerlagslinie liegen, Gewölbewangen.

5. Die Gewölbekappe bei gedrücktem Tonnengewölbe.

$$V = a_1 \left(\frac{br}{4} - \frac{2(r^3 - \varrho^3)}{3a}\right),\ M = a_1 \left(\frac{b}{2} - \frac{2rh}{a}\right)$$

6. Die Kappe, wenn $h = r$, $a = 2r$, und $\varrho = 0$ ist.

$$r^2 a_1 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) = 0{,}4521\ a_1 r^2,\ M = \frac{a_1 r}{2}(\pi - 2)$$

7. Die Gewölbewange beim gedrückten Gewölbe.

$$V = a_1 \left(\frac{2(r^3 - \varrho^3)}{3a} - \frac{a\varrho}{4}\right),\ M = \frac{2 a_1 h r}{a}$$

8. Die Wange, wenn $h = r$, $a = 2r$ und $\varrho = 0$:

$$V = \frac{a_1 r^2}{3},\ M = a_1 r$$

9. **Das Kreuzgewölbe über einem Rechteck mit den Seiten a und a_1**; r_1, b_1, ϱ_1, h_1 haben dieselbe Bedeutung wie r, ϱ etc.

$$V = a_1 \left(\frac{br}{2} - \frac{4(r^3 - \varrho^3)}{3a}\right) + a \left(\frac{b_1 r_1}{2} - \frac{4(r_1^3 - \varrho_1^3)}{3a_1}\right)$$

$$M = a_1 \left(b - \frac{4rh}{a}\right) + a \left(b_1 - \frac{4 r_1 h_1}{a_1}\right)$$

10. **Kreuzgewölbe** über einem Quadrat zur Seite a

$$V = a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) = 0{,}4521\ a^3,\ M = a^2(\pi - 2)$$

11. Wenn die Dicke eines Kreuzgewölbes gleich d, so ist der wirkliche Inhalt des Gewölbes:

$$J = (\pi - 2)\, a^2\, d + (4 - \pi)\, a d^2 - \frac{8}{3} d^3 \text{ oder}$$

$$J = 1{,}1416\, a^2\, d + 0{,}8584\, a d^2 - \frac{8}{3} d^3$$

12. Bei allen Gewölben von gleicher Dicke findet man angenähert: $J = Md$, wenn M das arithmetische Mittel aus der innern und äussern Mantelfläche ist.

13. Das $n$seitige regelmässige **Klostergewölbe.** Es sei ϱ der Radius des in das reguläre nEck eingeschriebenen Kreises und zugleich die Höhe des Gewölbes und a die Seite des nEcks und $\frac{180^0}{n} = \alpha$, so ist

$$M = an\varrho \quad = 2n\varrho^2 \operatorname{tg}\alpha$$

$$V = \frac{na\varrho^2}{3} = \frac{2n\varrho^3 \operatorname{tg}\alpha}{3}$$

14. **Hängekuppel.** a die Seite des Quadrats:

$$M = a^2 \pi \left(\sqrt{2} - 1\right), \quad V = \frac{a^3 \pi}{12} \left(5 - 2\sqrt{2}\right)$$

Näherungsweise Berechnung der Inhalte von Fässern und anderen Körpern.

a der Spunddurchmesser, b der Bodendurchmesser und h die Höhe des Fasses.

1. $V_1 = \frac{h\pi}{3}(2a^2 + b^2)$, nach der Simpson'schen Regel.

2. $V_2 = h\pi \left(\frac{2a + b}{3}\right)^2$, Lambert's Visirregel.

3. $V_3 = \frac{2V_1 + 3V_2}{5}$

4. Bei nicht vollen horizontal liegenden Fässern wendet man die Simpson'sche Regel an.

5. Zur näherungsweisen Berechnung der Inhalte von Körpern dient vorzugsweise die Simpson'sche Regel.

Berechnung des Gewichts eines Körpers aus seinem Volumen.

Ist V das Volumen und q das Gewicht der Volumeneinheit, so ist das Gewicht W gegeben durch

$$W = V \cdot q$$

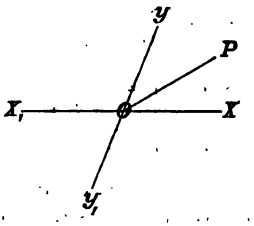
Wenn α das specifische Gewicht der Materie und γ das Gewicht einer Cubikeinheit Wassers in Pfunden, so ist

$$q = \alpha \cdot \gamma$$

Die Coordinaten in der Ebene.

1. Die Abschnitte auf OX positiv } Abscis-
- - - OX_1 negativ } sen
- - - OY positiv } Ordi-
- - - OY_1 negativ } naten.

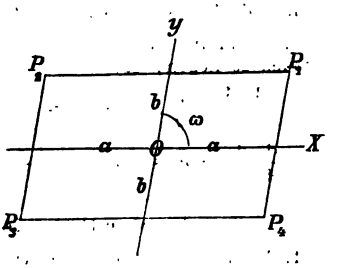
OP heisst Leitstrahl, oder Radiusvector des Punktes P.



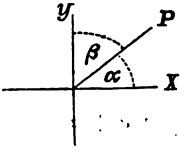
2. Die Parallelprojectionen von $OP = r$ auf die Axen heissen die Coordinaten des Punktes P.

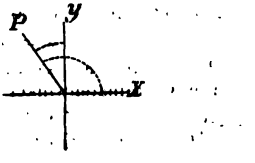
Die Coordinaten von

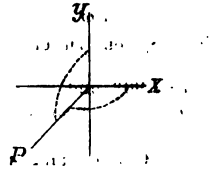
P_1 sind $x = +a$, $y = +b$
P_2 - $x = -a$, $y = +b$
P_3 - $x = -a$, $y = -b$
P_4 - $x = +a$, $y = -b$

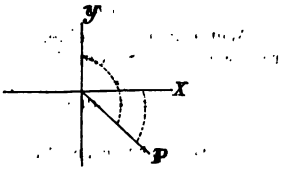


3. Die Winkel eines Radiusvector mit den positiven Halbaxen werden nach beiden Seiten bis 180° gezählt:









Für alle Lagen des Punktes P ist, wenn der Coordinatenwinkel $\omega = 90°$ ist:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta$$
$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

r und α heissen die Polarcoordinaten von P, wenn α nur nach einer Richtung von 0 bis 360° gezählt wird.

4. Die Distanz zweier Punkte A, (x, y), A_1, (x_1, y_1) gleich d, die Leitstrahlen derselben r und r_1, die Winkel mit OX und OY, α, β, α_1, β_1. So ist

$$x - x_1 = d\cos(d, X);\ y - y_1 = d\cos(d, Y);\ (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = d^2$$

$$\cos(r, r_1) = \frac{x x_1 + y y_1}{r r_1} = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1$$

$$\sin(r, r_1) = \frac{[(x_1^2+y_1^2)(x^2+y^2) - (xx_1+yy_1)^2]^{\frac{1}{2}}}{r r_1} = \pm\frac{x_1 y - x y_1}{r r_1}$$

$$= \pm(\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta_1)$$

$r\cos(r, r_1) = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1$; $r r_1 \sin(r, r_1) = \pm(x_1 y - x y_1) = 2f$ wenn f die Fläche des Dreiecks OAA_1 bezeichnet.

5. Wenn drei Punkte $A(x, y)$, $A_1(x_1, y_1)$ und $A_2(x_2, y_2)$ in einer Geraden so liegen, dass

$$\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{p}{q},\ \text{so ist}\ x = \frac{q x_1 + p x_2}{q + p},\ y = \frac{q y_1 + p y_2}{q + p}$$

$$\text{Ist}\ \frac{A_1 A}{A_1 A_2} = n,\ \text{so ist}\ x = x_1 + n(x_2 - x_1),\ y = y_1 + n(y_2 - y_1)$$

Verwandlung der Coordinaten.

1. Parallelverschiebung der Axen.

U und V die neuen Axen, x_1, y_1 die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf X und Y

$$x = x_1 + u,\ y = y_1 + v$$

2. Drehung der Axen.

Der Coordinatenwinkel ω.

$$\left.\begin{array}{l} \angle XOU = \alpha,\ \angle XOV = \beta \\ \angle YOU = \alpha_1,\ \angle YOV = \beta_1 \end{array}\right\}\ \text{dann ist}\ \alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \omega$$

$$y = \frac{u\sin\alpha + v\sin\beta}{\sin\omega},\ x = \frac{u\sin(\omega - \alpha) + v\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}$$

Wenn man von einem rechtwinkligen System zu einem andern rechtwinkligen System übergeht, so ist

$$\beta - \alpha = \alpha_1 - \beta_1 = \omega = 90^\circ \text{ und}$$
$$y = u\sin\alpha + v\cos\alpha,\ x = u\cos\alpha - v\sin\alpha.$$

Graphische Darstellung von Gleichungen.

1. Sind x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ... Werthe von x und y, welche einer Gleichung $u = o$ genügen, so lassen sich dieselben als Parallelcoordinaten von Punkten einer Ebene betrachten. Durchläuft die Unbekannte x alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig, so werden die Punkte P_1 P_2 P_3 im Allgemeinen in einer geraden oder krummen Linie liegen.

2. Konstruirt man nach No. 1 die Linien, für welche die Coordinaten irgend welcher Punkte den Gleichungen $u = o$ und $v = o$ genügen, so geben die Coordinaten der Schnittpunkte derselben die gesuchten Unbekannten. Hätte man statt $u = o$ und $v = o$ zu konstruiren, $u = o$ und $u + \lambda v = o$ konstruirt, wobei λ eine beliebige Zahl ist, so würden sich hierdurch dieselben Unbekannten ergeben haben.

3. Ist eine Linie nach einem bestimmten Gesetze entstanden, so wird sich zwischen den Coordinaten ihrer Punkte eine Gleichung aufstellen lassen, welche die Gleichung der Linie (Curve) genannt wird.

4. Lässt man bei der Gleichung einer Curve die Längeneinheit der Coordinaten unbestimmt, so muss die Summe der Exponenten der vorkommenden Maasse von Längen in den einzelnen Gliedern derselben, dieselbe sein.

5. Eine Curve heisst algebraisch, wenn ihre Gleichung eine algebraische Gleichung ist, und transcendent, wenn ihre Gleichung eine transcendente Gleichung ist.

Eine algebraische Curve heisst von der n^{ten} Ordnung oder vom n^{ten} Grade, wenn ihre Gleichung in Bezug auf die Coordinaten x und y vom n^{ten} Grade ist.

6. Eine Linie, welche ein System paralleler Sehnen einer Curve halbirt, heisst ein Durchmesser. Steht ein Durchmesser senkrecht zu den Sehnen, so wird derselbe eine Axe genannt.

7. Eliminirt man aus den Gleichungen zweier Curven eine der Coordinaten, so erhält man die Projectionen ihrer Schnittpunkte auf die Axe der andern Coordinate.

Setzt man in der Gleichung einer Curve die eine Coordinate gleich Null, so erhält man die Durchschnittspunkte der Curve mit der Axe der andern.

Die gerade Linie, bei rechtwinkligen Coordinaten.

1. $x = a$, Gleichung einer Geraden ∥ der YAxe

2. $y = b$, - - - - - XAxe

3. $y = ax$, Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht. a die Tangente des Winkels, welchen die Linie mit der positiven XAxe bildet und zwar in der Richtung nach der positiven YAxe gezählt.

4) $y = ax + b$, die Gleichung einer Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, b die Ordinate des Durchschnittspunkts der Linie mit der YAxe.

5) $Ax + By + C = 0$, allgemeine Gleichung der Geraden. Wenn x_0 und y_0 die Coordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit den Axen sind, so ist

$$x_0 = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{a}; \quad y_0 = -\frac{C}{B} = b$$

6. Werden die Werthe von x_0 und y_0 in (5) eingesetzt, so erhält man

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

7. Ist p das von O auf die Gerade gefällte Loth und sind α und β die Winkel, welche dieses Loth mit den Coordinatenaxen bildet, so ist

$$x_0 = p \sec \alpha, \quad y_0 = p \sec \beta \text{ und}$$
$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p$$

die Gleichung der Geraden.

8. Sind α' und β' die Winkel, welche die Gerade mit den Coordinatenaxen bildet, so hat man

$$y \cos \alpha' - x \cos \beta' = p$$

9. Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \text{ oder } y - y_1 = a(x - x_1)$$

10. Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

11. Durchschnittspunkt zweier Geraden.

$$\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix} y = a\ x + b \\ y = a_1\ x + b_1 \end{matrix}$$

$$x = -\frac{\Sigma C B_1}{\Sigma A B_1}, \quad y = -\frac{\Sigma A C_1}{\Sigma A B_1} \text{ oder } x = \frac{b_1 - b}{a - a_1}, \quad y = \frac{a b_1 - a_1 b}{a - a_1}$$

φ der Winkel zwischen den Geraden, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{a - a_1}{1 + a a_1} = \pm \frac{A B_1 - A_1 B}{A A_1 + B B_1}$$

$\varphi = 90°$, wenn $1 + a a_1 = 0$ oder $A A_1 + B B_1 = 0$

$\varphi = 0$, wenn $a = a_1$ oder $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$

12. Zwei parallele Gerade:

$$\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + C_1 = 0 \end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix} y = ax + b \\ y = ax + b_1 \end{matrix}$$

13. Zwei auf einander senkrechte Gerade:

$$\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay + C_1 = 0 \end{matrix} \text{ oder } \begin{matrix} y = ax + b \\ y = -\frac{1}{a} x + b_1 \end{matrix}$$

14. Eine Gerade parallel zu einer gegebenen durch den Punkt $(x_1\ y_1)$. Gegeben

$$Ax + By + C = 0 \text{ oder } y = ax + b, \text{ so ist}$$
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \text{ oder } y - y_1 = a(x - x_1)$$

15. Eine Gerade senkrecht zu einer gegebenen Geraden durch den Punkt (x_1, y_1). Gegeben

$$Ax + By + C = 0 \text{ oder } y = ax + b, \text{ dann ist}$$

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0 \text{ oder } y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

16. Gleichung einer Geraden, welche mit $y = ax + b$ den Winkel φ bildet und durch den Punkt (x_1, y_1) geht.

$$y - y_1 = \frac{a + \operatorname{tg}\varphi}{1 - a\operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$$

17. Länge des von (x_1, y_1) auf die Gerade $Ax + By + C = 0$ oder $y = ax + b$ gefällten Lothes:

$$p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ oder } p = \frac{y_1 - ax_1 - b}{\pm\sqrt{1 + a^2}}$$

18. Loth vom Anfangspunkt auf die Geraden in No. 17.

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ oder } p = \frac{b}{\pm\sqrt{1 + a^2}};\ p \text{ stets positiv.}$$

19. Inhalt eines Dreiecks aus den Coordinaten seiner Ecken.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

$$\pm 2f = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = \Sigma \pm 1\, x_2 y_3$$

20. Inhalt eines nEcks bei derselben Bezeichnung der Coordinaten.

$$\pm 2f = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) \ldots y_n(x_{n-1} - x_1)$$

Die Kegelschnitte.

1. $OS = d$, die Ebenen AQB und SQP senkrecht auf ABO. Winkel $DSB = \varphi$. $SN \perp AB$, $SE \perp AO$. $NS = e$, $AD = a$, $BD = b$, $SD = x$, $PD = QD = y$, $DE = u$. So ist

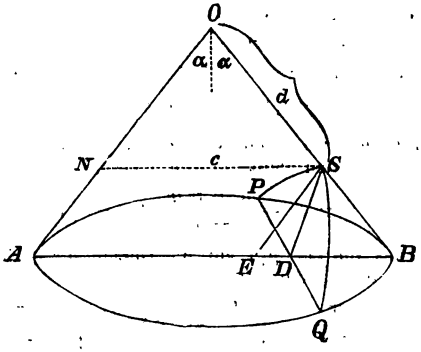
$$y^2 = ab = (c + u)b$$

$$b = \frac{x\sin\varphi}{\cos\alpha},\ u = \frac{x\sin(2\alpha - \varphi)}{\cos\alpha},\ c = 2d\sin\alpha$$

2. $y^2 = px + qx^2$, wenn $p = 2d\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi$, $q = \dfrac{\sin\varphi\sin(2\alpha - \varphi)}{\cos^2\alpha}$

3. Die Gleichung 2 heifst die Scheitelgleichung der Kegelschnitte. p der Parameter.

4. Der Schnitt ist eine Parabel für $q = 0$
   - - - - Ellipse - $q < 0$
   - - - - Hyperbel - $q > 0$
   - - - ein Kreis wenn $q = -1$



A. Der Kreis.

1. a und b die Coordinaten des Mittelpunktes, r der Radius, so ist für rechtwinklige Coordinaten die Gleichung des Kreises

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

2. Die allgemeine Gleichung des Kreises:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

$$a=-\frac{A}{2},\quad b=-\frac{B}{2},\quad r=\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$$

Die Gleichung stellt nur dann einen Kreis dar, wenn r reell ist, einen Punkt, wenn $r=0$ ist.

3. Die Punkte, in welchen der Kreis die Axen schneidet, werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$x^2+Ax+C=0 \text{ und } y^2+By+C=0$$

$$x_1+x_2=2a,\ y_1+y_2=2b,\ x_1x_2=y_1y_2=C$$

4. Wenn $A^2=4C$, oder $B^2=4C$, dann berührt der Kreis die x Axe, respective die y Axe und r ist B oder A. Ist $C=0$, so liegt der Anfangspunkt in der Peripherie.

5. Setzt man in (1) r für a und $b=0$, so ist

$$y^2=2rx-x^2,$$ die Scheitelgleichung.

6. Ist S die Sehne zum Punkte $P(x,\ y)$:

$$S^2=x^2+y^2=2rx$$

$$r=\frac{S^2}{2x}=\frac{x^2+y^2}{2x}$$

und wenn noch α der zur Sehne $2y$ gehörige Centriwinkel ist

$$x=r\pm\sqrt{r^2-y^2}=r\left(1\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x_1=2r\cos^2\frac{\alpha}{4}=y\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$$

$$x_2=2r\sin^2\frac{\alpha}{4}=y\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$$

7. Es sei φ der Winkel zwischen S und der x Axe und ψ der Centriwinkel zu S:

$$x = S\cos\varphi,\ y = S\sin\varphi,\ S = 2r\sin\frac{\psi}{2} \text{ und weil}$$

$S^2 = 2rx$, so ist auch $S = 2r\cos\varphi$, mithin $2\varphi = 180 - \psi$

8. O der Anfangspunkt, M der Mittelpunkt des Kreises, $OM = m$ und $\angle MOX = \alpha$, ferner der Leitstrahl $OP = \varrho$, so ist nach (1)

$$(\varrho\cos\varphi - m\cos\alpha)^2 + (\varrho\sin\varphi - m\sin\alpha)^2 = r^2 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 - 2m\varrho(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) + m^2 - r^2 = 0$$
$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = m\cos(\varphi - \alpha),\ \varrho_1\varrho_2 = m^2 - r^2$$

Wenn der Leitstrahl Tangente wird, ist $\varrho_1 = \varrho_2$ und
$$m\sin(\varphi - \alpha) = r$$

9. Die Gleichung $\varrho_1\varrho_2 = m^2 - r^2$ giebt die unter den Namen Sehnen-, Secanten- und Tangenten-Satz vorkommenden Lehrsätze.

10. Wenn in (1) a und $b = 0$ sind, also der Anfangspunkt im Mittelpunkt liegt, ist

$x^2 + y^2 = r^2$, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ Mittelpunktsgleichung.

11. Secante durch zwei Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, der Mittelpunkt der Anfangspunkt.

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

12. Gleichung der Tangente durch $P_1(x_1 y_1)$:

$$yy_1 + xx_1 = r^2,\ \operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_1}{y_1}$$

13. Gleichung der Normale: $y = \frac{y_1}{x_1}x$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{y_1}{x_1}$
$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = -1$$

14. Tangente $T = r\operatorname{tg}\psi = \frac{ry_1}{x_1}$, Normale $N = r$

Subtangente $Stg = y_1\operatorname{tg}\psi = \frac{y_1^2}{x_1}$, Subnormale $Sn = x_1$

15. Die Linie $y = ax + b$ ist eine Tangente, wenn

$$a = -\frac{x_1}{y_1},\ b = \frac{r^2}{y_1}$$

16. Tangente durch den Punkt (p, q), ausserhalb des Kreises.
$y - q = a(x - p)$ (Siehe No. 15)

Die Coordinaten der Berührungspunkte x_1 und y_1 sind aus den Gleichungen: $qy + px = r^2$ und $x^2 + y^2 = r^2$ zu berechnen.

17. Construction der Tangenten in No. 16. Die Berührungspunkte sind die Durchschnittspunkte der beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 - px - qy = 0 \text{ und } x^2 + y^2 = r^2$$

18. Die Gleichung des Kreises, welcher durch die Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$ geht, ist durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ gegeben.}$$

19. Zwei Kreise: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ und
$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
sind concentrisch, wenn $A = A_1$ und $B = B_1$.

Sind die Kreise excentrisch, dann ist die Centrale c gegeben durch

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{(A - A_1)^2 + (B - B_1)^2}$$

Ist $A = A_1$ und $B \gtrless B_1$ oder $B = B_1$ und $A \gtrless A_1$, so ist die Centrale der xAxe respective der yAxe $\parallel$

20. Die Differenz der Kreisgleichungen in No. 19
$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$
heisst die Gleichung der Chordale. Die Chordale ist die gemeinschaftliche Sehne, wenn sich die Kreise schneiden.

Die von einem Punkte der Chordale an den Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang.

21. In dem Nachfolgenden bedeutet:
r den Radius d den Durchmesser, p den Umfang, f den Flächeninhalt, a, α und b Sehne, den dazu gehörigen Centriwinkel und Bogen, A und S Ausschnitt und Segment.

$$\frac{\text{arc}\,\alpha}{\pi} = \frac{\alpha^0}{180^0} = \frac{\alpha'}{10800'} = \frac{\alpha''}{648000''}; \quad \text{arc}\,1' = \frac{1}{k}; \quad k = 3437{,}75$$

22. $p = 2r\pi = d\pi = 2\sqrt{\pi}\sqrt{f}$

23. $f = r^2\pi = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{1}{4\pi}p^2$

24. $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2\pi}\cdot p = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{f}$

25. $b = \frac{\alpha^0}{360^0}\cdot 2r\pi = r\,\text{arc}\,\alpha = \frac{r\alpha'}{k}$

26. $A = \frac{\alpha^0}{360^0}r^2\pi = \frac{r^2\,\text{arc}\,\alpha}{2} = \frac{r^2\alpha'}{2k} = \frac{br}{2}$

27. $S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0}{180^0}\cdot\pi - \sin\alpha\right) = \frac{r^2}{2}(\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha)$

28. Kreisring, ϱ der Radius des innern Kreises,

$$r - \varrho = c, \qquad \frac{r + \varrho}{2} = m$$

f die Fläche

$$f = (r^2 - \varrho^2)\pi = (r + \varrho)(r - \varrho)\pi = 2mc\pi$$

29. Ausschnitt eines Kreisringes:

$$f = \frac{\alpha^0}{360^0}(r+\varrho)(r-\varrho)\pi = \frac{m c a^1}{k}$$

Die folgenden Nummern enthalten Näherungsformeln, welche, wenn r nicht gross ist und φ nicht nahe an 90° liegt, für viele Fälle in der Praxis hinreichend genaue Resultate geben. h sei die Höhe des Kreissegments, a_1 die Sehne des halben und p die halbe Sehne des doppelten Centriwinkels.

30. $b = a + \frac{a-b}{3} = 2a_1 + \frac{2a_1 - a}{3} = a + \frac{ah}{3r}$

31. $a = b - \frac{b-p}{4} = \frac{8a_1 + p}{5}$

32. $p = 4a - 3b = 5a - 8a_1$

33. $A = \frac{r(4a-p)}{6} = \frac{r(8a_1 - a)}{6} = \frac{a}{2}\left(r + \frac{h}{3}\right)$

34. $S = \frac{2r(a-p)}{3} = \frac{8r(2a_1 - a)}{3} = \frac{2ah}{3}$

35. Die letzte Formel giebt für $r = 10$ und $\alpha = 30°$, $S = 20{,}57$ während der genaue Werth 20,00 beträgt.

B. Die Parabel.

1) Scheitelgleichung: $y^2 = px$

2. Abstand des Brennpunkts vom Scheitel: $\frac{p}{4}$

3. Abstand der Directrix vom Scheitel: $\frac{p}{4}$

4. Gleichung der Secante durch (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$y - y_1 = \frac{p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

5. Gleichung der Tangente durch (x_1, y_1):

$$2yy_1 = p(x + x_1); \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2y_1}$$

6. Gleichung der Normale durch (x_1, y_1):

$$p(y - y_1) + 2y_1(x - x_1) = 0$$

7. Leitstrahl vom Brennpunkt nach (x, y): $\varrho = x + \frac{p}{4}$

8. Tangente $T = 2\sqrt{\varrho x} = \sqrt{px + 4x^2}$,

Normale $N = \sqrt{p\varrho} = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}$,

Subtangente $Stg = 2x$, Subnormale $Sn = \frac{p}{2}$

9. Gleichung der Parabel in Bezug auf einen Durchmesser und

die Tangente seines Scheitels als Axen. Der Durchmesser die U-Axe, die Tangente die V-Axe, der Scheitel der Anfangspunkt:

$$v^2 = (p + 4x)\,u = 4\varrho u$$

10. Die Gleichung der Parabel wenn die Axen um a und b ∥ verschoben sind: $(y-b)^2 = p\,(x-a)$.

11. Gleichung der Parabel, wenn die U-Axe eine Sehne, deren Länge $2a$ und deren Abstand vom Scheitel h beträgt. Die V-Axe ∥ der Axe der Parabel, der Anfangspunkt ein Endpunkt der Sehne.

$$y + u = a \qquad x + v = h \qquad a^2 = ph$$

$$v = \frac{h}{a^2}\,(2au - u^2)$$

12. Tangenten im Anfangspunkt O: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2h}{a}$

13. Tangente im Anfangspunkte, wenn die Punkte $P_1\,(u_1, v_1)$ und $P_2\,(u_2, v_2)$ gegeben sind:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \frac{v_1 - v_2}{u_2 - u_1}$$

14. Wenn $\dfrac{v_1}{u_1} = \operatorname{tg}\beta_1$, $\dfrac{v_2}{u_2} = \operatorname{tg}\beta$ und $\dfrac{v_1 - v_2}{u_2 - u_1} = \operatorname{tg}\gamma$, so hat man $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$. Ist h sehr klein, so sind auch die Winkel β_1, β und γ sehr klein, und man hat angenähert

$$\varphi = \beta_1 + \beta + \gamma$$

Diese Gleichung findet genau beim Kreise statt.

15. Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, welche die Linien OP_1 und OP_2 mit den Tangenten in P_1 und P_2 bilden, so ist unter der Voraussetzung von No. 14

$$\varphi_1 = \varphi - \beta_1 = \beta + \gamma \text{ und } \varphi_2 = \varphi - \beta = \beta_1 + \gamma$$

16. Die Polargleichung der Parabel, wenn der Brennpunkt der Pol, die Axe die Polaraxe ist.

$$\varrho = \frac{p}{4\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

17. Flächeninhalt eines Segments, dessen Sehne senkrecht zur Axe steht: $f = \frac{2}{3}xy$, wenn x, y die Coordinaten des einen Endpunkts der Sehne.

18. Ein beliebiges Segment, (x, y), (x_1, y_1) die Endpunkte der Sehne:

$$f = \frac{(y - y_1)^3}{6p} \text{ oder } f = \frac{x - x_1}{6} \cdot \frac{(y - y_1)^2}{y + y_1}$$

19. Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloïds

$$V = \frac{y^2 \pi x}{2}$$

20. Parallel abgekürztes Paraboloïd, wenn m die Mittelfläche und $x - x_1 = h$ die Höhe desselben:

$$V = mh \text{ und } m = (y^2 + y_1^2)\,\frac{\pi}{2}$$

21, Volumen des Körpers, welcher entsteht, wenn ein Segment, dessen Sehne senkrecht zur Axe steht, sich um die Tangente am Scheitel dreht: $v = \frac{8}{3} x^2 \pi y$.

C. Die Ellipse.

1. Scheitelgleichung: $y^2 = px - qx^2$, oder wenn $\frac{p}{q} = 2a$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$, $2a$ die grosse und $2b$ die kleine Axe.

2. Mittelpunktsgleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ wenn $x = a \cos\psi$, $y = b \sin\psi$, ψ der excentrische Winkel.

3. Mittelpunktsgleichung, wenn die Axen um α und β $\parallel$ verschoben sind: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

4. Excentricität: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, gleich dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt.

5. ϱ und ϱ_1 die Leitstrahlen des Punktes (x, y) in Bezug auf die Brennpunkte:

$$\varrho + \varrho_1 = 2a, \quad \varrho = a - \frac{ex}{a}, \quad \varrho_1 = a + \frac{ex}{a}$$

6. Gleichung einer Secante durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2)

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1)$$

7. Gleichung der Tangente durch (x_1, y_1):

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \text{ oder } \frac{yy_1}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y_1}{x_1}, \text{ also } \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

8. Gleichung der Normale: $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$

9. Tangente: $T = \frac{ay_1}{bx_1}\sqrt{\varrho\varrho_1}$, Normale bis zur x Axe $= \frac{b}{a}\sqrt{\varrho\varrho_1}$, Normale bis zur y Axe $= \frac{a}{b}\sqrt{\varrho\varrho_1}$, $\operatorname{Stg} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$, $\operatorname{Sn} = \frac{b^2 x_1}{a^2}$

10. M der Mittelpunkt, F und F' die Brennpunkte, N der Durchschnittspunkt der Normale mit der x Axe, so ist

$$MN = \frac{e^2 x_1}{a^2}, \quad FN = \frac{e\varrho}{a}, \quad F'N = \frac{e\varrho_1}{a}, \text{ also } \frac{FN}{F'N} = \frac{\varrho}{\varrho_1}$$

d. h. die Normale halbirt den Winkel zwischen den Leitstrahlen. Die Tangente halbirt den Winkel zwischen einem Leitstrahl und der Verlängerung des andern.

11. Die Fusspunkte der von F und F' auf die Tangenten gefällten Lothe liegen in der Peripherie des um M mit a beschriebenen Kreises.

12. Durchmesser $\parallel$ einer Tangente und Durchmesser durch den Berührungspunkt sind conjugirte.

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

ψ und φ die Winkel, welche die Durchmesser mit der positiven x Axe bilden.

13. Gleichung der Ellipse in Bezug auf conjugirte Durchmesser A und B die halben Durchmesser.

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1,\quad A^2 + B^2 = a^2 + b^2,\quad AB\sin(\varphi - \psi) = ab$$

$$A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2\cos^2\psi},\quad B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - e^2\cos^2\varphi}$$

14. Construction der Ellipse aus zwei der Grösse und Lage nach gegebenen conjugirten Durchmessern

$$a + b = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(90 - \alpha)}$$
$$a - b = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(90 - \alpha)} \qquad \alpha = \varphi - \psi$$

Es sind also $a + b$ und $a - b$ die Diagonalen eines Parallelogrammes, in welchem A und B die Seiten und $90 - \alpha$ der von ihnen eingeschlossene Winkel ist. No. 11 dient zur Bestimmung der Richtung der Axen.

15. Inhalt eines Segments vom Scheitel der grossen Axe, die Sehne senkrecht zur Axe.

$$f = \frac{2b}{a}\Sigma\sqrt{2ax - x^2}\Delta x = \frac{b}{a}\left(a^2 \operatorname{arc}\cos\frac{a-x}{a} - (a-x)\sqrt{2ax - x^2}\right)$$

16. Inhalt des Segments, wenn die Sehne durch den Scheitel der grossen Axe geht.

$$f = \frac{a}{2}\left(b \operatorname{arc}\cos\frac{a-x}{a} - y\right)$$

17. Verbindet man den Endpunkt der Sehne in No. 16 mit dem Mittelpunkt der Ellipse, dann ist der Inhalt des zu dieser Sehne gehörigen Sectors:

$$f = \frac{ab}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{a-x}{a}$$

18. Fläche der ganzen Ellipse: $f = ab\pi$

19. Rotationsellipsoïd

α) Drehung um die grosse Axe: $v = \frac{4}{3}ab^2\pi$

β) „ „ „ kleine „ $v = \frac{4}{3}a^2 b\pi$

20. Zone des Ellipsoïds bei Drehung um die grosse Axe

$$v = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{b^2}{a^2}h^2\right)$$

21. Abschnitt von der Höhe h: $v = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h^2\pi}{3}(3a - h)$.

22. Inhalte von Abschnitten und Ausschnitten und Umdrehungskörper in Bezug auf die kleine Axe erhält man, wenn man in den entsprechenden Formeln a mit b vertauscht.

23. Polargleichung der Ellipse für einen Brennpunkt als Pol, die grosse Axe als Polaraxe

$$\varrho = \frac{\frac{p}{2}}{1 + \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

D. Die Hyperbel.

1. Scheitelgleichung: $y^2 = px + qx^2$. $\frac{p}{q} = 2a$, $q = \frac{b^2}{a^2}$, so ist der Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$. $2a$ die grosse Axe, $2b$ die kleine Axe.

2. Die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

Wenn $x = a \sec\psi$, so ist $y = b \operatorname{tg}\psi$

3. Excentricität: $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, gleich dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt.

4. ϱ und ϱ_1 die Leitstrahlen des Punktes (x, y):

$$\varrho = \frac{ex}{a} - a,\ \varrho_1 = \frac{ex}{a} + a,\ \varrho_1 - \varrho = 2a$$

5. Gleichung einer Secante durch (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1)$$

6. Gleichung der Tangente durch den Punkt in No. 5.

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \text{ oder } \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},\ \operatorname{tg}\psi = \frac{y_1}{x_1},\ \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}$$

7. Gleichung der Normale: $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$

8. Tangente: $\frac{ay_1}{bx_1}\sqrt{\varrho\varrho_1}$, Normale $= \frac{b}{a}\sqrt{\varrho\varrho_1}$ bis zur x Axe und $\frac{a}{b}\sqrt{\varrho\varrho_1}$ bis zur y Axe. Subtangente $= \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$, Subnormale $= \frac{b^2 x_1}{a^2}$

9. M der Mittelpunkt, F und F' die Brennpunkte und L der Durchschnittspunkt der Tangente mit der x Axe.

$$ML = \frac{a^2}{x_1},\ LF = e - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}\varrho,\ LF' = \frac{a}{x_1}\varrho_1$$

also $\frac{FL}{F'L} = \frac{\varrho}{\varrho_1}$ d. h. die Tangente halbirt den Winkel zwischen den Leitstrahlen. Die Normale halbirt den Winkel zwischen einem Leitstrahl und der Verlängerung des andern.

10. Die Fusspunkte der von F und F' auf die Tangenten gefällten Lothe, liegen in der Peripherie eines Kreises, welcher um M mit a beschrieben ist.

11. Conjugirte Durchmesser, φ und ψ die Winkel mit der x Axe:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}$$ Siehe No. 12 in C. (Seite 140).

12. Gleichung der Hyperbel in Bezug auf conjugirte Durchmesser:

$$\frac{u^2}{A^2} - \frac{v^2}{B^2} = 1$$

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2 \qquad AB\sin(\psi - \varphi) = ab$$

13. Gleichungen der Asymptoten: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

14. Coordinaten in Bezug auf die Asymptoten als Axen.

$$u = \frac{e}{2b}\left(\frac{b}{a}x - y\right),\ v = \frac{e}{2b}\left(\frac{b}{a}x + y\right)$$

$$uv = \frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

15. Flächeninhalt eines Segments, dessen Sehne senkrecht zur x Axe steht:

$$f = xy - ab\log n\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

16. Flächeninhalt des Sectors, welcher zu den Endpunkten der Sehne in No. 15 gehört:

$$f = ab\log n\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

17. Gleichseitige Hyperbel: $a = b$ und $x^2 - y^2 = a^2$

18. Für $a = 1$, $x^2 - y^2 = 1$. Sector aus No. 16: $f = \log n(x + y)$

$$e^f = x + y,\ e^{-f} = x - y$$

$$x = \frac{e^f + e^{-f}}{2} = \mathfrak{Cof}\, f,\ y = \frac{e^f - e^{-f}}{2} = \mathfrak{Sin}\, f$$

19. Volumen der Umdrehungskörper, Drehung um die grosse Axe, Segment von der Höhe x:

$$V = \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2\pi}{3}(3a + x)$$

Die körperliche Zone von der Höhe h

$$V = \frac{h\pi}{6}\left(3y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right)$$

20. Drehung um die kleine Axe. Zone von der Höhe y, wenn der Mittelpunkt in der einen Grundfläche liegt

$$V = \frac{a^2 \pi y}{3 b^2} (y^2 + 3 b^2)$$

E. Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte.

1. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

$$\Delta = AFC - AE^2 - CD^2 - FB^2 + 2BED = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}$$

$$\alpha = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix}$$

$$\beta = AF - D^2 = \begin{vmatrix} A, & D \\ D, & F \end{vmatrix}, \quad \gamma = CF - E^2 = \begin{vmatrix} C, & E \\ E, & F \end{vmatrix}$$

2. Die Gleichung (1) hat keine geometrische Bedeutung, wenn

$$\alpha > 0, \ \Delta \gtrless 0 \ \frac{\Delta}{A} > 0$$

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ A \gtrless 0, \ \beta > 0$$

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ C \gtrless 0, \ \gamma > 0$$

3. Die Gleichung (1) bedeutet einen Punkt, wenn

$$\alpha > 0, \ \Delta = 0$$

4. Die Gleichung (1) bedeutet eine doppelte Gerade, wenn

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ A \gtrless 0, \ \beta = 0,$$

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ C \gtrless 0, \ \gamma = 0$$

5. Die Gleichung (1) bedeutet zwei parallele Gerade, wenn

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ A \gtrless 0, \ \beta < 0$$

$$\alpha = 0, \ \Delta = 0, \ C \gtrless 0, \ \gamma < 0$$

6. Die Gleichung (1) bedeutet zwei sich schneidende Gerade, wenn

$$\alpha < 0 \text{ und } \Delta = 0$$

7. Die Gleichung (1) bedeutet eine Ellipse, wenn

$$\alpha > 0, \ \Delta \gtrless 0, \ \frac{\Delta}{A} < 0$$

8. Die Gleichung (1) bedeutet eine Parabel, wenn

$$\alpha = 0 \text{ und } \Delta \gtrless 0$$

9. Die Gleichung (1) bedeutet eine Hyperbel, wenn

$$\alpha < 0 \text{ und } \Delta \gtrless 0$$

F. Zurückführung der allgemeinen Gleichung (1) in E. auf die Scheitelgleichung.

1. Setzt man für x $\quad x_1 + u\cos\alpha - v\sin\alpha$
und für y $\quad y_1 + u\sin\alpha + v\cos\alpha$
so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$A_1 u^2 + 2B_1 uv + C_1 v^2 + 2D_1 u + 2E_1 v + F_1 = 0$$

in welcher, wenn α_1 und Δ_1 dieselbe Bedeutung wie α und Δ in E (1) haben,

$$A + C = A_1 + C_1,\ \alpha = \alpha_1 \text{ und } \Delta = \Delta_1$$

2. Soll die Gleichung in (1) die Form

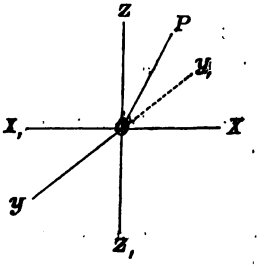
$$A_1 u^2 + C_1 v^2 + 2D_1 u = 0 \text{ annehmen, also}$$

$B_1 = E_1 = F_1 = 0$ sein, so ist

$$A + C = A_1 + C_1,\ A_1 C_1 = \alpha \text{ und } C_1 D_1^2 = -\Delta$$

aus welchen Gleichungen sich A_1, C_1 und D_1 bestimmen lassen, ausserdem ist noch $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2B}{A - C}$

Die Coordinaten im Raume.



1. Die Abschnitte auf OX, OY u. OZ positiv,
die Abschnitte auf OX_1, OY_1 u. OZ_1 negativ
OP der Leitstrahl des Punktes P.

2. Die Parallelprojectionen von $OP = r$ auf die Axen heissen die Coordinaten des Punktes P.

3. Zeichen der Coordinaten.

				x	y	z					x	y	z
P_1	liegt in	OX	Y	Z	+	+	+	P_5	liegt in	OX	Y	Z_1	+	+	−
P_2	„	„	OX_1	Y	Z	−	+	+	P_6	„	„	OX_1	Y	Z_1	−	+	−
P_3	„	„	OX	Y_1	Z	+	−	+	P_7	„	„	OX	Y_1	Z_1	+	−	−
P_4	„	„	OX_1	Y_1	Z	−	−	+	P_8	„	„	OX_1	Y_1	Z_1	−	−	−

4. Die Winkel eines Radiusvectors mit den positiven Halbaxen, α, β, γ, werden von 0 bis 180° gezählt. Für alle Lagen eines Punktes P, (x, y, z) ist bei rechtwinkligen Coordinaten

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

5. Der Punkt P (x, y, z) der Punkt P_1 (x_1, y_1, z_1), $PP_1 = d$, $OP = r$, $OP_1 = r_1$, so ist

$$x - x_1 = d\cos(d, X),\ y - y_1 = d\cos(d, Y),\ z - z_1 = d\cos(d, Z)$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d^2$$

$$\cos(r, r_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1} = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

$$\sin(r, r_1) = \frac{[(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) - (xx_1+yy_1+zz_1)^2]^{\frac{1}{2}}}{rr_1}$$

$$= \frac{[(y_1 z - y z_1)^2 + (z_1 x - z x_1)^2 + (x_1 y - x y_1)^2]^{\frac{1}{2}}}{rr_1}$$

$$= (\cos\beta_1\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta_1)^2$$

f der Inhalt des Dreiecks OP_1P, f_1, f_2 und f_3 die Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinaten-Ebenen, so ist

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

Wenn $\angle(r, r_1) = 90^0$, $\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0$
Ferner ist $r\cos(r, r_1) = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$

6. Wenn P in der Richtung von P_1P_2 liegt und $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{p}{q}$, dann ist

$$x = \frac{qx_1 + px_2}{q+p},\quad y = \frac{qy_1 + py_2}{q+p},\quad z = \frac{qz_1 + pz_2}{q+p}$$

Wenn aber $\frac{P_1P}{P_1P_2} = n$, dann ist

$$x = x_1 + n(x_2 - x_1),\ y = y_1 + n(y_2 - y_1),\ z = z_1 + n(z_2 - z_1)$$

7. Winkel eines Leitstrahls mit den Coordinatenebenen.

α' mit der Ebene OZY
β' „ „ „ OXZ
γ' „ „ „ OXY

dann ist $\alpha + \alpha' = 90^0$, $\beta + \beta' = 90^0$ und $\gamma + \gamma' = 90^0$

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 2$$

8. Winkel einer Ebene E mit den Coordinatenebenen. Wenn das von O auf E gefällte Loth mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, so ist

$$\angle E, XY = \gamma,\quad \angle E, XZ = \beta,\quad \angle E, YZ = \alpha$$

9. Projectionen von Linien und ebenen Figuren auf die Coordinatenebenen. l eine begrenzte Linie, l_1, l_2, l_3 ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen, α, β, γ die Winkel der Linie mit diesen Ebenen, so ist

$$l_1 = l\cos\alpha,\ l_2 = l\cos\beta,\ l_3 = l\cos\gamma \text{ und}$$
$$2l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$$

f eine begrenzte ebene Figur, α, β, γ die Neigungswinkel gegen die Coordinatenebenen, f_1, f_2, f_3 die Projectionen dieser Figuren auf die genannten Ebenen, so ist

$$f_1 = f\cos\alpha,\ f_2 = f\cos\beta,\ f_3 = f\cos\gamma \text{ und}$$
$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

Verwandelung der Coordinaten.

1. Parallelverschiebung der Axen. Die neuen Axen U, V, W und x_1, y_1, z_1 der Anfangspunkt der neuen Axen in Bezug auf die alten, so hat man

$$x = x_1 + u,\ y = y_1 + v,\ z = z_1 + w$$

2. Drehung der Axen um den Anfangspunkt. Die alten und die neuen Axen rechtwinklig.

U bildet mit X Y Z die Winkel α_1, β_1, γ_1
V - - X Y Z - - α_2, β_2, γ_2
W - - X Y Z - - α_3, β_3, γ_3

Die Cosinus dieser Winkel sind der Reihe nach

a_1, b_1, c_1 a_2, b_2, c_2 a_3, b_3, c_3 dann ist

$$\begin{aligned} x &= a_1 u + a_2 v + a_3 w \text{ und } u = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y &= b_1 u + b_2 v + b_3 w \qquad v = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z &= c_1 u + c_2 v + c_3 w \qquad w = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

Es ist: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$, für u, v und w die obigen Werthe eingesetzt, giebt durch Vergleichung der Ausdrücke

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \quad a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \text{ und ebenso} \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \quad a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{aligned}$$

3. Ist OO_1 die Schnittlinie der Ebenen XY und UV, und Winkel $O_1 OX = \psi$, Winkel $O_1 OU = \varphi$ und der Winkel zwischen Z und W gleich γ, so ist auch

$$\begin{aligned} x &= (\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma)u + (\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma)v \\ &\qquad - \sin\psi\sin\gamma \cdot w \\ y &= (\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\gamma)u + (\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\gamma)v \\ &\qquad + \cos\psi\sin\gamma \cdot w \\ z &= \sin\varphi\sin\gamma \cdot u - \cos\varphi\sin\gamma \cdot v + \cos\gamma \cdot w \end{aligned}$$

Polarcoordinaten.

r der Radiusvector, γ der Winkel desselben mit der positiven Z Axe von 0^0 bis 180^0 gezählt, δ der Winkel, den die Ebene durch r und Z Axe mit der Ebene ZOX bildet, von 0^0 bis 360^0 gezählt, so ist

$$x = r\sin\gamma\cos\delta \quad y = r\sin\gamma\sin\delta \quad z = r\cos\gamma$$

Darstellung der Flächen durch Gleichungen.

1. Alle Punkte, deren Coordinaten einer unbestimmten Gleichung zwischen x, y und z genügen, liegen in einer Fläche; die Gleichung zwischen x, y, z heisst die Gleichung dieser Fläche. Eine Fläche heisst algebraisch, wenn ihre Gleichung algebraisch, und transcen-

dent, wenn diese transcendent ist. Eine algebraische Fläche heisst vom n^{ten} Grade, wenn die Summe der Exponenten der Coordinaten im höchsten Gliede n ist.

2. Die Punkte, deren Coordinaten zwei unbestimmten Gleichungen zwischen x, y und z genügen, liegen in der Durchschnittslinie der Flächen, welche diesen Gleichungen entsprechen.

3. Eliminirt man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Coordinate; so ist die Eliminationsgleichung die Gleichung der Projection der Durchschnittslinie beider Flächen auf die Ebene der andern Coordinaten.

4. Setzt man in die Gleichung einer Fläche für eine Coordinate den Werth Null ein, so erhält man die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Ebene der beiden andern Coordinaten.

Die Gleichung der Ebene.

1. $x = a$, Ebene $\parallel$ der YZ Ebene
2. $y = b$, - - XZ -
3. $z = c$, - - XY -
4. $Ax + By = D$, Gleichung einer Ebene $\parallel$ der Z Axe
5. $Ax + Cz = D$, - - - - Y -
6. $By + Cz = D$, - - - - X -
7. $Ax + By + Cz = 0$, Gleichung einer Ebene durch den Anfangspunkt.

8. $Ax + By + Cz + D = 0$, allgemeine Gleichung der Ebene.

9. Wenn x_0, y_0, z_0 die Lage der Schnittpunkte einer Ebene mit den Axen bestimmen, so ist

$$x_0 = -\frac{D}{A},\quad y_0 = -\frac{D}{B},\quad z_0 = -\frac{D}{C}$$

dann erhält man aus No. 8

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

10. Wenn p das Loth vom Anfangspunkt auf eine Ebene bezeichnet, und α, β, γ die Winkel dieses Lothes mit den Axen sind, so ist

$$p = x_0 \cos\alpha = y_0 \cos\beta = z_0 \cos\gamma$$

Aus No. 9 folgt noch

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

$$p = \frac{D}{A}\cos\alpha = \frac{D}{B}\cos\beta = \frac{D}{C}\cos\gamma = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(p stets positiv)

$$\cos\alpha = \frac{Ap}{D},\quad \cos\beta = \frac{Bp}{D},\quad \cos\gamma = \frac{Cp}{D}$$

11. Loth vom Punkte (x_1, y_1, z_1) auf die Ebene E.

$$p = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

12. Eine Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1)
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

13. Die Ebene $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ geht durch die Punkte $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$, $(x_3\ y_3\ z_3)$, wenn
$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

14. Zwei Ebenen E und E_1, φ ihr Neigungswinkel.
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$
Die Ebenen E und E_1 sind $\parallel$ wenn $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$

Die Ebenen E und E_1 stehen senkrecht auf einander, wenn
$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

15. Entfernung der parallelen Ebenen
$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und } Ax + By + Cz + D_1 = 0$$
$$p = \pm\frac{D - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die gerade Linie.

1. $\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$, (x_1, y_1, z_1) ein Punkt in der Linie, α, β, γ ihre Winkel mit den Axen.

2. Wenn $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$, so ist
$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = m \text{ gesetzt: } \cos\alpha = \frac{A}{m}, \ \cos\beta = \frac{B}{m}, \ \cos\gamma = \frac{C}{m}$$

3. Durchschnitt der Linie (2) mit den Coordinatenebenen.
XYEbene $x = x_1 - \frac{Az_1}{C}$, XZEbene $x = x_1 - \frac{Ay_1}{B}$, YZEbene $y = y_1 - \frac{By_1}{A}$
$$y = y_1 - \frac{Bz_1}{C} \qquad z = z_1 - \frac{Cy_1}{B} \qquad z = z_1 - \frac{Cx_1}{A}$$

4. Gleichung der Geraden durch die Punkte $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5. Die Gerade in No. 2 steht senkrecht auf der Ebene
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

6. Die Gerade in No. 2 liegt in der Ebene E_1
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ wenn}$$
$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0 \text{ und } AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

7. Die Gerade No. 2 ist $\parallel$ der Ebene E_1, wenn
$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

8. Zwei Gerade L und L_1, φ der Winkel zwischen beiden Geraden. φ wird bestimmt durch die beiden Leitstrahlen $\parallel L$ und L_1
$$\cos\varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

9. Wenn φ der Winkel der Geraden L mit der Ebene E ist, so ist
$$\sin\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

10. Loth von $x_2\ y_2\ z_2$ auf L, wenn zur Abkürzung
$$x_2 - x_1 = X,\ y_2 - y_1 = Y,\ z_2 - z_1 = Z$$
$$p^2 = \frac{(BZ - CY)^2 + (CX - AZ)^2 + (AY - BX)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

11. Zwei Gerade L und L_1, Ebene durch $L_1 \parallel L$
$$\begin{vmatrix} x - x_2, & A & A_1 \\ y - y_2, & B & B_1 \\ z - z_2, & C & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

12. Kürzeste Entfernung der Geraden L und L_1
Wenn $\begin{vmatrix} B & B_1 \\ C & C_1 \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} C & C_1 \\ A & A_1 \end{vmatrix} = b$, $\begin{vmatrix} A & A_1 \\ B & B_1 \end{vmatrix} = c$, so ist
$$p = \frac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

13. Geht L_1 durch den Anfangspunkt
$$p = \frac{ax_2 + by_2 + cz_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

14. Wenn L_1 mit der XAxe zusammenfällt:
$$p_1 = \frac{Cy_1 - Bz_1}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \frac{y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta}{\sin\alpha}$$

15. Wenn L_1 mit der YAxe zusammenfällt:
$$p_2 = \frac{Az_1 - Cx_1}{\sqrt{A^2 + C^2}} = \frac{z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma}{\sin\beta}$$

16. Wenn L_1 mit der ZAxe zusammenfällt:
$$p_3 = \frac{Bx_1 - Ay_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

Die gerade Linie als Durchschnitt der Ebenen E und E_1.

1. Eliminirt man aus den Gleichungen von E und E_1 einmal x, das anderemal y, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der

Durchschnittslinie von E und E_1 auf die Ebenen YZ und XZ in der Form

$$y = bz + y_1, \quad x = az + x_1 \text{ oder auch}$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - 0}{1} \text{ mithin}$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{m}, \quad \cos\beta = \frac{b}{m}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{m}$$

2. Setzt man in die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ für x Null, so hat man die Gleichung der Schnittlinie von E und der Ebene YZ etc.

Axonometrische Projectionen.

Projection eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf eine Ebene E. Auf den Axen sind gleiche Längen a abgeschnitten. Die Axen bilden der Reihe nach mit E die Winkel α, β, γ, und ihre Projectionen sind x, y und z.

1. $x = a\cos\alpha$, $y = a\cos\beta$, $z = a\cos\gamma$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 = p$

3. Nennt man φ und ψ die Winkel, welche eine Linie senkrecht zur YAxe mit der XAxe und mit der ZAxe bilden, so ist

$$\cos\varphi = \frac{y\sqrt{p\,(p - 2z^2)}}{2xy}, \quad \cos\psi = \frac{y\sqrt{p\,(p - 2x^2)}}{2yz}$$

4. Beim Zeichnen wählt man das Verhältniss von $x : y : z$ und bestimmt darnach φ, ψ, α, β und γ.

5. Tabelle für bestimmte Axenverhältnisse.

Die Axen			Die Axenwinkel				Verjüngung der Axen		
x	y	z	φ	$tg\,\varphi$	ψ	$tg\,\psi$	x	y	z
1	1	1	30°	0,577	30°	0,577	0,816	0,816	0,816
1	1	$\frac{1}{2}$	7°11′	0,126	41°24½′	0,882	943	943	471
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	13°38′	0,243	13°38′	0,243	727	970	727
$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	21°58½′	0,403	21°58½′	0,403	762	915	762
$\frac{5}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	5°44½′	0,101	5°44½′	0,101	711	995	711
1	1	$\frac{1}{3}$	62°44′	1,940	13°30′	0,240	727	727	970
2	1	2	41°24½′	0,882	41°24½′	0,882	943	471	943
4	1	4	44° 6½′	0,969	44° 6½′	0,969	985	246	985
8	1	8	44°47′	0,992	44°47′	0,992	996	125	996
1	1	$\frac{1}{2}$	1°47′	0,031	44° 6½′	0,969	985	985	246
$\frac{3}{4}$	1	1	36°50′	0,749	16°20′	0,293	663	883	883
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	36°50′	0,749	36°50′	0,749	883	663	883

Bestimmung der perspectivischen Projection eines Punktes durch Rechnung und Construction.

1. Für den Augenpunkt A sei

$$x = -d,\ y = 0 \text{ und } z = h$$

die Ebene ZY sei die Bildebene.

2. Die Lage des Punktes $P_1\ (x_1\ y_1\ z_1)$ soll auf der Bildebene bestimmt werden, d. h. der Durchschnittspunkt der Linie AP_1 mit der Ebene ZY ist zu suchen.

3. Die Gleichung der Linie AP_1 ist

$$\frac{x - x_1}{d + x_1} = \frac{y - y_1}{y_1} = \frac{z - z_1}{z_1 - h}$$

Setzt man $x = 0$, dann sind y und z die Coordinaten der perspectivischen Projection. Man erhält

$$y = \frac{d}{d + x_1} \cdot y_1,\ z = \frac{d}{d + x_1} \cdot z_1 + \frac{h}{d} \cdot \frac{d}{d + x_1} \cdot x_1$$

4. Construirt man für dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem die Hyperbeln

$$u = \frac{d}{d + x},\ u = \frac{2d}{d + x},\ u = \frac{3d}{d + x} \text{ etc.}$$

und zieht eine Reihe sehr naher Ordinaten, so hat man einen krummlinigen Maassstab, welcher, wie der gradlinige Maassstab beim Zeichnen nach Axen zur Construction einer perspectivischen Zeichnung gebraucht werden kann.

Die Flächen zweiten Grades.

1. Allgemeine Gleichung.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

2. Die Fläche hat einen Mittelpunkt, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & F, & E \\ F, & B, & D \\ E, & D, & C \end{vmatrix}$$

ungleich Null ist.

3. Wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunkts sind, so ist

$$Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G = 0 \quad Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H = 0$$
$$Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J = 0$$

4. Wenn der Radiusvector r des Punktes $P\ (x, y, z)$ auf der Fläche $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = K$ senkrecht steht, also eine Axe derselben ist, so hat man, wenn noch $\frac{K}{r^2}$ mit s bezeichnet wird, zur Bestimmung der Grösse und Lage der Axen:

$$\begin{vmatrix} A - s, & F, & E, \\ F, & B - s, & D \\ E, & D, & C - s, \end{vmatrix} = E \underbrace{\begin{vmatrix} F, & E \\ B - s, & D \end{vmatrix}}_{u} + D \underbrace{\begin{vmatrix} E, & A - s \\ D, & F \end{vmatrix}}_{v} + (C - s) \underbrace{\begin{vmatrix} A - s, & F \\ F, & B - s \end{vmatrix}}_{w} = 0$$

$$\frac{\cos\alpha}{u} = \frac{\cos\beta}{v} = \frac{\cos\gamma}{w} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

5. Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben, a, b und c die halben Axen.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ das Ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ das Hyperboloid mit einem Fache

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ das Hyperboloid mit zwei Fächern

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ der Kegel

6. Die Kugel. a, b und c die Coordinaten des Mittelpunkts, r der Radius

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \text{ und, wenn}$$
$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \text{ so ist}$$
$$a=-\frac{A}{2},\ b=-\frac{B}{2},\ c=-\frac{C}{2},\ r=\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2+4D}$$

7. Flächen zweiten Grades ohne Mittelpunkt.

$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{p}$ das elliptische Paraboloid

$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\frac{2x}{p}$ das hyperbolische Paraboloid

$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ der elliptische Cylinder

$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ der hyperbolische Cylinder

$\frac{x^2}{c^2}-\frac{2y}{p}-\frac{2x}{q}=0$ der parabolische Cylinder.

Differenzialrechnung.

A. Einleitung.

(Erklärungen und Bezeichnungen.)

1. Eine Zahl, welche alle Zahlenwerthe der stetigen Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine veränderliche Zahl, während eine Zahl, welche einen bestimmten Zahlenwerth behält eine constante Zahl genannt wird.

2. Die veränderlichen Zahlen bezeichnet man gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des lateinischen Alphabets, wogegen die Constanten durch die ersten Buchstaben desselben bezeichnet werden.

3. Eine Zahl, welche von einer oder mehreren Veränderlichen abhängt, heisst eine Function dieser Veränderlichen. Sind u und v Functionen von x, so deutet man dieses durch:

$u=f(x)$ oder $\psi(x)$ und
$v=F(x)$ oder $\varphi(x)$ an.

Wäre u eine Function von x und y und v eine Function von x, y, z, so würde man dieses durch

$u = f(x, y)$ oder $\lambda(x, y)$ und
$v = F(x, y, z)$ oder $\psi(x, y, z)$ andeuten können.

Die Veränderlichen $x, y, z \ldots$ werden auch die Argumente der Function genannt. Das Argument heisst die unabhängig Veränderliche, während eine Function eine abhängig Veränderliche heisst.

4. Functionen von der Form $u = f(x)$, $v = F(x, y)$, $w = \varphi(x, y, z)$ heissen entwickelte (explicite) Functionen. Sind die abhängig Veränderlichen mit ihren Argumenten auf irgend eine Weise verbunden, so dass die Herstellung der obigen Form der Function die Auflösung einer Gleichung erfordert, so nennt man die Function eine unentwickelte (implicite).

Entspricht einem bestimmten Werthe des Arguments einer Function stets nur ein Werth derselben, so heisst die Function einförmig; gehören aber zu einem Werthe des Arguments mehrere Werthe der Function, so wird dieselbe vielförmig genannt.

5. Wenn $u = f(x)$, so bezeichnen:
$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ .... der Reihe nach die Werthe von u für: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, ...
Bezeichnet $f(x)$ irgend eine Function, so ist $f(x + h)$ dieselbe Function für das Argument $x + h$.

6. Irgend einen Zuwachs von x bezeichnet man durch Δx; Δx ist also die Differenz zweier aufeinander folgenden Werthe der Veränderlichen.

Ist $v = f(x)$, so heisst: $f(x + \Delta x) - f(x)$ die Differenz der Function $f(x)$, dieselbe wird durch $\Delta f(x)$ oder Δu bezeichnet.

Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Zuwachse von x heisst die zweite Differenz von x, man schreibt dafür $\Delta^2 x$. Die entsprechende Differenz von $f(x)$ ist $\Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x)$, welche durch $\Delta^2 f(x)$ oder $\Delta^2 u$ bezeichnet wird. (Man vergleiche arithmetische Reihen.)

7. Die einfachsten Functionen sind:

1. $u = a + x$, 2. $u = a - x$, 3. $u = ax$, 4. $u = \frac{a}{x}$,
5. $u = x^a$, 6. $u = a^x$, 7. $u = \log x$, 8. $u = \sin x$,
9. $u = \cos x$, 10. $u = \text{arc sin } x$, 11. $u = \text{arc cos } x$.

arc sin x wird gelesen: der Bogen dessen sinus gleich x ist.

8. Jede Function, welche durch irgend welche Verbindung der einfachen Functionen entsteht, heisst eine zusammengesetzte Function.

9. Eintheilung der Functionen.

1. Functionen, welche aus den einfachen Functionen 1 bis 5 in No. 7 zusammengesetzt sind heissen algebraische Functionen, alle andern Functionen heissen transcendente.

2. Die algebraischen Functionen zerfallen in rationale und irrationale. Bei den rationalen Functionen sind die Veränderlichen nur mit ganzen Exponenten behaftet, während bei den irrationalen die Exponenten der Veränderlichen Brüche sind.

Eine rationale Function $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x^n$ heisst eine ganze Function n^{ten} Grades.

3. Eine Function $u = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ heisst eine gebrochene Function von x.

Ist $f(x)$ eine rationale Function n^{ten}
und $\varphi(x)$ - - - p^{ten} Grades,

so heisst u eine echt gebrochene Function, wenn:
$n < p$ und eine unecht gebrochene, wenn:
$n > p$ ist

Jede unecht gebrochene rationale Function von x lässt sich zerlegen in zwei Summanden, von denen der eine, eine ganze Function von x und der andere eine echt gebrochene Function von x ist.

4. Eine Function $f(x, y, z, \ldots)$ heisst eine homogene Function n^{ten} Grades, wenn

$$f(xt, yt, zt \ldots) = t^n f(x, y, z) \text{ ist.}$$

5. Ist $f(x) = f(k + x) = f(2k + x) = \ldots f(nk + x)$, so wird $f(x)$ eine periodische Function von x genannt, die Zahl k heisst das Intervall der Periode.

10. Die graphische Darstellung der Functionen.

1. Ist $y = f(x)$, so kann man x als die Abscisse und y als die Ordinate des Punktes (x, y) der Curve betrachten deren Gleichung $y = f(x)$ ist.

2. Wenn $z = f(x, y)$ ist, so lassen sich x, y, z als zusammengehörige Parallelcoordinaten der Fläche betrachten, deren Gleichung $z = f(x, y)$ ist.

11. Stetigkeit der Functionen.

1. Eine Function $u = f(x)$ heisst stetig für jeden Werth von x, wenn für jede unendlich kleine Zunahme des Arguments auch die Function eine unendlich kleine Veränderung erleidet.

2. Ist $\lim f(x_1 + \alpha) = \lim f(x_1 - \beta)$, wobei α und β gegen Null convergiren, so ist $f(x)$ für den speciellen Werth $x = x_1$ stetig. Sind die beiden Grenzwerthe ungleich, so findet bei der Function eine Unterbrechung der Stetigkeit statt wenn $x = x_1$ ist.

12. Differenzialquotient und Differenzial.

1. Ist $y = f(x)$ eine stetige Function von x, so nennt man den Grenzwerth des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ für ein ohne Ende abnehmendes } \Delta x, \text{ also:}$$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, den Differenzialquotienten, oder auch

die Ableitung von $f(x)$ nach x. (Man vergleiche endliche Reihen.)

2. Um den Grenzübergang anzudeuten, lässt man das Zeichen lim fort und schreibt dafür statt des Buchstaben Δ, ein d vor x und $f(x)$.

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Zur Abkürzung schreibt man auch:

$$\frac{dy}{dx} = D_x y = y' \text{ und } \frac{df(x)}{dx} = D_x f(x) = f'(x).$$

3. Es ist $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, also $\Delta f(x) = (f'(x) + \alpha)\Delta x$, wobei α eine Zahl ist, welche mit Δx zugleich Null wird.

4. Aus No. 3 ergiebt sich, wenn Δx gegen Null convergirt:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

dx heisst das Differenzial von x und $df(x)$ das Differenzial von $f(x)$.

5. Ist C unabhängig von x, so ist $\frac{dC}{dx} = 0$ und $dC = 0$.

13. Darstellung des Differenzialquotienten.

1. Wenn $y = f(x)$ die Ordinate einer Curve bei rechtwinkligen Coordinaten ist, so ist $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie der Curve im Punkte (x, y) mit der positiven XAxe bildet.

2. Ist $f(x)$ der Inhalt einer Figur, welche begrenzt ist von einer krummen Linie, den rechtwinkligen Ordinaten der Punkte (x_0, y_0) und (x, y) und der Differenz der Abscissen $(x - x_0)$, so ist $f'(x) = y$.

3. Stellt $f(x)$ das Volumen eines Körperabschnitts von der Höhe x vor, so ist $f'(x)$ der Inhalt der Grundfläche dieses Abschnitts.

4. Bezeichnet $f(t)$ bei irgend einer Bewegung eines Punktes den in der Zeit t durchlaufenen Weg, so ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit dieses Punktes zur Zeit t.

5. Ist $f(t)$ die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit t, so ist $f'(t)$ die Beschleunigung des Punktes zu dieser Zeit.

B. Grundformeln.

1. $dx^n = nx^{n-1}dx$; $n = \frac{1}{2}$ giebt: $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

2. $da^x = a^x \log n a\, dx$, $de^x = e^x dx$

3. $d\log n x = \frac{dx}{x}$, $d\log x = \log e \cdot \frac{dx}{x}$

4. $d\sin x = \cos x\, dx$

5. $d\cos x = -\sin x\,dx$

6. $d\operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,dx$

7. $d\operatorname{cotg} x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

8. $d\operatorname{logn}\sin x = \operatorname{cotg} x\,dx$

9. $d\operatorname{logn}\cos x = -\operatorname{tg} x\,dx$

10. $d\operatorname{logn}\operatorname{tg} x = -d\operatorname{logn}\operatorname{cotg} x = \dfrac{2\,dx}{\sin 2x}$

11. $d\operatorname{logn}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{dx}{\sin x}$

12. $d\operatorname{logn}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{dx}{\cos x}$

13. $d\operatorname{arc}\sin x = -d\operatorname{arc}\cos x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $d\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = -d\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$

15. $d\operatorname{arc}\sec x = -d\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

16. $d\operatorname{arc}\sin(1-x) = -d\operatorname{arc}\cos(1-x) = \dfrac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

17. $d\operatorname{Sin} x = \operatorname{Co}x\,dx$

18. $d\operatorname{Co}x = \operatorname{Sin} x\,dx$

19. $d\operatorname{Tg} x = \dfrac{dx}{\operatorname{Co}^2 x} = \operatorname{Sec}^2 x\,dx$

20. $d\operatorname{Cotg} x = -\dfrac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Cosec}^2 x\,dx$

21. $d\operatorname{logn}\operatorname{Sin} x = \operatorname{Cotg} x\,dx$

22. $d\operatorname{logn}\operatorname{Co}x = \operatorname{Tg} x\,dx$

23. $d\operatorname{logn}\operatorname{Tg} x = \dfrac{2\,dx}{\operatorname{Sin} 2x}$

24. $d\operatorname{logn}\operatorname{Tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{dx}{\operatorname{Sin} x}$

25. $d\operatorname{Arc}\operatorname{Sin} x = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

26. $d\operatorname{Arc}\operatorname{Co}x = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

27. $d\operatorname{Arc}\operatorname{Tg} x = d\operatorname{Arc}\operatorname{Cotg} x = \dfrac{dx}{1-x^2}$

C. Allgemeine Formeln.

1. Wenn u eine Function von x ist,

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx, \quad \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$du^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx} \cdot dx; \quad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Wenn $u = a + bx^r$, $\quad \frac{du}{dx} = rbx^{r-1}$

also $d(a + bx^r)^n = nrbx^{r-1}(a + bx^r)^{n-1} dx$

$$de^u = e^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

Wenn $u = a + bx^2$, $\quad \frac{du}{dx} = 2bx$

$$de^{a+bx^2} = e^{a+bx^2} 2bx\,dx$$

$$d\log u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \cdot dx$$

$$d\sin u = \cos u \frac{du}{dx} \cdot dx$$

$$d\arc\sin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

2. Wenn $u = f(x)$, $x = \varphi(y)$ und $y = \psi(x)$, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

3. Wenn u, v, w Functionen von x sind:

$$d(Au + Bv + C) = dAu + dBv + dC = Adu + Bdv + 0$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$= uv\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right)$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$= \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right)$$

$$\frac{dF(u,v,w)}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dx}$$

Wenn $u = x$:

$$\frac{dF(x,v,w)}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dx}$$

4. Wenn $z = F(x, y)$

$$dz = \frac{dF}{dx} \cdot dx + \frac{dF}{dy} \cdot dy$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dy} = \frac{d^2F}{dy\,dx}, \quad \frac{d^3F}{dx^2\,dy} = \frac{d^3F}{dy\,dx^2}$$

$$d^2z = \frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2$$

5. Wenn $F(x, y) = 0$.

$$-\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{2\,d^2F}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

6. Wenn x und y von t abhängen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\right] : \left(\frac{dx}{dt}\right)^5$$

7. Wenn $y = t$, Vertauschung der unabhängigen Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}\right] : \left(\frac{dx}{dy}\right)^5$$

8. Wenn $F(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function vom $n$ten Grade ist:

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} + \ldots = nF(x, y, z \ldots)$$

$$x^2\frac{d^2F}{dx^2} + 2xy\frac{d^2F}{dx\,dy} + y^2\frac{d^2F}{dy^2} + \ldots = n(n-1)F(x, y, z \ldots)$$

D. Beziehungen zwischen einer Function und ihren Ableitungen.

1. Wenn $f(x)$ reell und stetig in der Nähe von $x = x_0$, so wächst $f(x)$ mit wachsendem x wenn $Df(x) > 0$, und es nimmt ab $f(x)$ - - x - $Df(x) < 0$

2. Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ reell, $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$, beide Functionen stetig von $x=x_0$ bis $x=x_0+h$, und ausserdem $D\varphi(x)$ zwischen diesen Grenzen stets >0 oder stets <0, so ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-A<0 \text{ und } \frac{f(x)}{\varphi(x)}-B>0 \text{ oder } \frac{f(x)}{\varphi(x)}-A>0 \text{ und } \frac{f(x)}{\varphi(x)}-B<0$$

wenn A und B die grössten und kleinsten Werthe sind, welche der Quotient $\frac{Df(x)}{D\varphi(x)}$ zwischen den Grenzen x_0 und x_0+h annimmt. Hieraus folgt

3. $\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)}=\frac{Df(x_0+\mu h)}{D\varphi(x_0+\mu h)}$ und wenn $f(x)-f(x_0)$ für $f(x)$, sowie $\varphi(x)-\varphi(x_0)$ für $\varphi(x)$ gesetzt wird

4. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}=\frac{Df(x_0+\mu h)}{D\varphi(x_0+\mu h)}$

5. $f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot Df(x_0+\mu h)$ wenn μ positiv und <1

6. Wenn für $f(x)$ und $\varphi(x)$ nach und nach ihre Ableitungen gesetzt werden und für diese die Bedingungen in No. 2 stattfinden, so ist

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)}=\frac{Df(x_0+\mu_1 h)}{D\varphi(x_0+\mu_1 h)}=\frac{D^2f(x_0+\mu_2 h)}{D^2\varphi(x_0+\mu_2 h)}=\ldots=\frac{D^nf(x_0+\mu_n h)}{D^n\varphi(x_0+\mu_n h)}$$

wenn $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_n$ positiv und <1.

E. Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe.

1. Wenn $f(x)$, $Df(x)$, $D^2f(x)$ $\ldots$ endlich und stetig von x bis $x+h$ und μ positiv <1, so hat man

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)\cdot\frac{h}{1}+D^2f(x)\cdot\frac{h^2}{2!}\ldots$$

$$D^nf(x)\cdot\frac{h^n}{n!}+D^{n+1}f(x+\mu h)\cdot\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ist λ positiv und <1 und $p\geqq 0$, so ist das Restglied auch gleich

$$D^{n+1}f(x+\lambda h)\cdot\frac{(1-\lambda)^{n-p}}{p+1}\cdot\frac{h^{n+1}}{n!}$$

2. $f(x)=f(a)+Df(a)\cdot\frac{(x-a)}{1}+D^2f(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}\ldots$

$$D^nf(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}+D^{n+1}f[a+\mu(x-a)]\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Für $a=0$ hat man

3. $f(x) = f(0) + Df(0) \cdot \frac{x}{1} + D^2 f(0) \frac{x^2}{2!} \cdots$

$$D^n f(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + D^{n+1} f(\mu x) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Wenn $f(x, y)$ und die partiellen Ableitungen dieser Function von x bis $x + h$ und von y bis $y + k$ endlich und stetig sind, so ist:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) +$$
$$\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k +$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2 f}{dx\, dy} hk + \frac{d^2 f}{dy^2} k^2\right) +$$
$$\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3 f}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3 f}{dx^2\, dy} h^2 k + 3 \frac{d^3 f}{dx\, dy^2} hk^2 + \frac{d^3 f}{dy^3} k^3\right) +$$

etc. ... und unter den obigen Bedingungen:

5. $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) +$
$$\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k + \frac{df}{dz} l + \text{ etc.}$$

F. Werthe solcher Ausdrücke, welche die Form

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 annehmen.

1. Wenn $f(a) = 0$ und $\varphi(a) = 0$, so ist
$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{Df(a)}{D\varphi(a)}$, wenn $Df(a) = 0$ und $D\varphi(a) = 0$
$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{D^2 f(a)}{D^2 \varphi(a)}$ und so weiter

2. Wenn $f(a) = \infty$ und $\varphi(a) = \infty$ ist, so verfährt man eben so wie in No. 1.

3. Da $f(x)\,\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)}$ so lassen sich die Ausdrücke von der Form $0 \cdot \infty$ nach No. 1 und 2 ermitteln.

4. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ die Form $\infty - \infty$ annimmt, so versuche man $f(x) - \varphi(x)$ in ein Product zu verwandeln.

5. Da $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \log f(x)}$ ist, so reducirt sich die Bestimmung von 1^∞, 0^0 und ∞^0 auf die von $0 \cdot \infty$.

6. Wenn die vorstehenden Methoden nicht zum Ziele führen, so setze man, wenn der Ausdruck für $x = a$ unbestimmt wird, statt x,

$a + h$ und versuche, ob man durch Heben mit einer Potenz von h den Factor beseitigen kann, durch welchen der Ausdruck die unbestimmte Form erhält.

G. Maxima und Minima der Functionen.

1. Eine Function mit einer Veränderlichen. Die Gleichung $Df(x) = 0$ bestimmt die Werthe von x, für welche ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ stattfinden kann.

Es findet für $x = x_1$ ein Max. statt, wenn $D^2 f(x_1) < 0$

" " " " " Min. " " $D^2 f(x_1) > 0$

Ist $D^2 f(x_1) = 0$, dann muss, wenn ein Max. oder Min. stattfinden soll, $D^3 f(x_1) = 0$ und $D^4 f(x_1) \lessgtr 0$ sein, u. s. w.

2. Der Functionswerth: $f(x_1, y_1)$ ist ein Max. oder Min., wenn

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 > 0 \text{ und zwar}$$

ein Max., wenn $\frac{d^2f}{dx^2}$ und $\frac{d^2f}{dy^2}$ beide < 0 und

" Min., " " " " " > 0 sind.

3. Sollen die Werthe von x und y gefunden werden, für welche $f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum wird, wenn zwischen x und y die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ besteht, so bilde man $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ und setze $\frac{du}{dx} = 0$ und $\frac{du}{dy} = 0$. Diese Gleichungen und $\varphi(x, y) = 0$ geben die Werthe von x und y für welche $f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum wird. (Relatives Maximum oder Minimum.)

Je nachdem:

$$\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \lessgtr 0 \text{ ist,}$$

findet ein Maximum oder Minimum statt.

H. Zerlegung rationaler Brüche in Partialbrüche.

1. Wenn $F(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n)\,\varphi(x)$ ist, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{A_3}{x - a_3} + \cdots \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}, \text{ wobei}$$

$$A_r = f(x) : \frac{F(x)}{x - a_r} \text{ für } x = a_r \text{ also : } A_r = \frac{f(a_r)}{DF(a_r)} \text{ ist.}$$

2. Wenn $F(x) = (x - a)^n \varphi(x)$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x - a)^n} + \frac{A_1}{(x - a)^{n-1}} + \cdots \frac{A_{n-1}}{x - a} + \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}.$$

Bildet man:
$\frac{f(a+y)}{\varphi(a+y)} = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 \ldots B_{n-1} y^{n-1} + \frac{y^n \psi(y)}{\varphi(a+y)}$, so ist
$A_0 = B_0$, $A_1 = B_1 \ldots A_{n-1} = B_{n-1}$ und $\lambda(x) = \psi(x-a)$.

3. Für $F(x) = x^n - 1$ ist: $a_r = \cos\frac{2(r-1)\pi}{n} + i \sin\frac{2(r-1)\pi}{n}$
$= \varepsilon^{2(r-1)}$ und

$$A_r = \frac{f(\varepsilon^{2(r-1)})}{n(\varepsilon^{2(r-1)})^{n-1}} = \frac{\varepsilon^{2(r-1)} f(\varepsilon^{2(r-1)})}{n}, \text{ also}$$

$$\frac{f(x)}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{f(1)}{x-1} + \frac{\varepsilon^2 f(\varepsilon^2)}{x-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^4 f(\varepsilon^4)}{x-\varepsilon^4} + \ldots \frac{\varepsilon^{2(n-1)} f(\varepsilon^{2(n-1)})}{x-\varepsilon^{2(n-1)}}\right).$$

4. Für $F(x) = x^n + 1$ ist: $a_r = \cos\frac{(2r-1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$
$= \varepsilon^{2r-1}$ und

$$A_r = -\frac{1}{n}\varepsilon^{2r-1} f(\varepsilon^{2r-1}) \text{ also}$$

$$\frac{f(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3 f(\varepsilon^3)}{x-\varepsilon^3} + \ldots \frac{\varepsilon^{2n-1} f(\varepsilon^{2n-1})}{x-\varepsilon^{2n-1}}\right).$$

Integralrechnung.

A. Grundformeln.

Die willkürliche Constante ist überall fortgelassen worden.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n = -\frac{1}{2}$ giebt $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
2. $\int \frac{dx}{x} = \log n x$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log n a}$, $\int e^x dx = e^x$
4. $\int \cos x dx = \sin x$
5. $\int \sin x dx = -\cos x$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$
8. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \sec x$

9. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x$

10. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \operatorname{logn} \sin x$

11. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\operatorname{logn} \cos x$

12. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{logn} \operatorname{tg} x$

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{logn} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{logn} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{logn} (\sec x + \operatorname{tg} x)$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin } x \text{ oder } - \text{arc cos } x$

16. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } x \text{ oder } - \text{arc cotg } x$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arc sec } x \text{ oder } - \text{arc cosec } x$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\text{arc sin } (1 - x) \text{ oder arc cos } (1 - x)$

19. $\int \mathfrak{Cof}\, x\, dx = \mathfrak{Sin}\, x$

20. $\int \mathfrak{Sin}\, x\, dx = \mathfrak{Cof}\, x$

21. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cof}^2 x} = \mathfrak{Tg}\, x$

22. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\mathfrak{Cotg}\, x$

23. $\int \mathfrak{Cotg}\, x\, dx = \operatorname{logn} \mathfrak{Sin}\, x$

24. $\int \mathfrak{Tg}\, x\, dx = \operatorname{logn} \mathfrak{Cof}\, x$

25. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{logn} \mathfrak{Tg}\, x$

26. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x} = \operatorname{logn} \mathfrak{Tg} \frac{x}{2}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,x = \log n\,(x+\sqrt{x^2+1})$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cof}\,x = \log n\,(x+\sqrt{x^2-1})$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cof}\,(1+x) = \log n\,(x+1+\sqrt{2x+x^2})$

30. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\log n\,\frac{1+x}{1-x}$

B. Allgemeine Gesetze.

1. $\int (A\,du + B\,dv) = A\int du + B\int dv + C$

2. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Theilweise Integration.

3. $\int f(x)\,dx = \int \varphi(z)\,dz$, wenn $\varphi(z) = f(\psi(z)) \cdot \frac{d\psi(z)}{dz}$

z. B. 1. $\int x\cos x\,dx$. Man setze

$u = x$, also $du = dx$; $\cos x\,dx = dv$, mithin $\sin x = v$ und

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $x^2 + a^2 = z^2$ und $x\,dx = z\,dz$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{z\,dz}{z} = \int dz = z = \sqrt{x^2+a^2}$$

3. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$, $e^x = z$, $e^x\,dx = dz$ und

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg}\,z = \text{arc tg}\,e^x$$

4. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cof}\,x}$, $\mathfrak{Cof}\,x = \sec\varphi$ gesetzt, giebt: $dx = \mathfrak{Cof}\,x\,d\varphi$ mithin

$$\int \frac{dx}{\mathfrak{Cof}\,x} = \varphi\text{; oder auch: arc sin } \mathfrak{Tg}\,x.$$

5. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int t x\,dx$, wenn $\sqrt{1-x^2} = tx$, also

$$x^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

Durch theilweise Integration:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2} tx^2 - \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \tfrac{1}{2} \arcsin x.$$

6. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int tx\,dx$, wenn $\sqrt{x^2-1} = tx$, also

$$x^2 = \frac{1}{1-t^2}$$

Durch theilweise Integration

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{tx^2}{2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{tx^2}{2} - \tfrac{1}{4}\log\frac{1+t}{1-t} \text{ oder}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \tfrac{1}{4}\log\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

7. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{dx}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{2\,d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{a+b+(a-b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ und } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \text{ gesetzt.}$$

$$= \int \frac{2\,dz}{a+b+(a-b)z^2}$$

Ist $a-b > 0$, so erhält man einen Arcus und ist $a-b < 0$, so erhält man einen Logarithmus. Man sehe No. 4 und 5 des folgenden Abschnitts.

C. Formeln durch Verallgemeinerung der Grundformeln erhalten.

1. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$ 3. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log n\,(a+bx)$

4. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}}$

5. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} l\log n \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sin} x\sqrt{\frac{b}{a}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log n\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{-a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log n\,(x\sqrt{b}+\sqrt{-a+bx^2})$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a-2bx}{a}\right)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} l\log n\,[a+2bx+2\sqrt{bx(a+bx)}]$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log n\left(\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{x}\right)$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,sec} x\sqrt{\frac{b}{a}}$

13. $\int \frac{dx}{a+\beta x+bx^2} = \int \frac{dz}{a+bz^2}$, wenn

$$a = \frac{4ab-\beta^2}{4b} \text{ und } z = x+\frac{\beta}{2b} \text{ ist.}$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+\beta x+bx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}$ Wie in No. 13

15. $\int \frac{z\,dz}{a+bz^2} = \frac{1}{2b}\log n(a+bz^2)$ 16. $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{a+bz^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+bz^2}$

17. $\int \frac{x\,dx}{a+\beta x+bx^2} = \frac{1}{2b}\log n(a+\beta x+bx^2) - \frac{\beta}{2b}\int \frac{dx}{a+\beta x+bx^2}$

18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+\beta x+bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+\beta x+bx^2} - \frac{\beta}{2b}\int \frac{dx}{\sqrt{a+\beta x+bx^2}}$

19. Ist $u = \alpha + \beta x + b x^2$ und
$v = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \cdots A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n$, so wie
$w = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 \cdots B_{n-1} x^{n-1}$, so ist

$$\int \frac{v\,dx}{\sqrt{u}} = w\sqrt{u} + C\int \frac{dx}{\sqrt{u}}.$$

B_0, B_1, B_2 $\cdots$ und C ergeben sich nach der Methode der unbestimmten Coefficienten aus:

$$v = u\,D_x w + \tfrac{1}{2} w\,D_x u + C.$$

D. Reductionsformeln.

1. $\int u^n dz = \frac{u^n z}{2n+1} + \frac{2an}{2n+1}\int u^{n-1} dz;\quad u = a + bz^2.$

2. $\int \frac{dz}{u^n} = \frac{1}{2a(n-1)} \cdot \frac{z}{u^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a(n-1)}\int \frac{dz}{u^{n-1}}$

3. $\int \frac{z^p dz}{u^n} = -\frac{z^{p-1}}{b(2n-p-1)u^{n-1}} + \frac{(p-1)a}{2n-p-1}\int \frac{z^{p-2} dz}{u^n}$

4. $\int \frac{dz}{z^p u^n} = -\frac{1}{(p-1)az^{p-1}u^{n-1}} - \frac{(2n+p-3)b}{(p-1)a}\int \frac{dz}{z^{p-2}u^n}$

Spezielle Fälle, wenn $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ etc. gesetzt wird.

1. $\int \frac{dz}{u\sqrt{u}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{\sqrt{u}}$

2. $\int \frac{dz}{u^2\sqrt{u}} = \frac{z}{3au\sqrt{u}} + \frac{2}{3a}\int \frac{dz}{u\sqrt{u}}$

3. $\int \sqrt{u}\,dz = \frac{z\sqrt{u}}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{u}}$

4. $\int u\sqrt{u}\,dz = \frac{zu\sqrt{u}}{4} + \frac{3a}{4}\int \sqrt{u}\,dz$

Reductionsformeln für $u = a + bx^n$

$$\int u^p x^q dx = \frac{x^{q+1}u^p}{np+q+1} + \frac{apn}{np+q+1}\int x^q u^{p-1} dx$$

$$= -\frac{x^{q+1}u^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{np+n+q+1}{an(p+1)}\int x^q u^{p+1} dx$$

$$= \frac{x^{q+1-n}u^{p+1}}{b(np+q+1)} - \frac{a(q+1-n)}{b(np+q+1)}\int x^{q-n} u^p dx$$

$$= \frac{x^{q+1}u^{p+1}}{a(q+1)} - \frac{b(np+n+q+1)}{a(q+1)}\int x^{q+n} u^p dx$$

$$\int u^p x^q\,dx = \frac{x^{q+1}u^p}{q+1} - \frac{bnp}{q+1}\int x^{q+n}u^{p-1}\,dx$$

$$= \frac{x^{q+1-n}u^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{q+1-n}{bn(p+1)}\int x^{q-n}u^{p+1}\,dx$$

Reductionsformel für $\int \sin x^p \cos x^q\,dx$

$$\int \sin x^p \cos x^q\,dx = \frac{\sin x^{p+1}\cos x^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \sin x^{p+2}\cos x^{q-2}\,dx$$

$$= -\frac{\sin x^{p-1}\cos x^{q+1}}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int \sin x^{p-2}\cos x^{q+2}\,dx$$

$$= -\frac{\sin x^{p-1}\cos x^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin x^{p-2}\cos x^q\,dx$$

$$= \frac{\sin x^{p+1}\cos x^{q-1}}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin x^p \cos x^{q-2}\,dx$$

$$= \frac{\sin x^{p+1}\cos x^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int \sin x^{p+2}\cos x^q\,dx$$

$$= -\frac{\sin x^{p+1}\cos x^{q+1}}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int \sin x^p \cos x^{q+2}\,dx$$

Specielle Fälle des Vorstehenden.

1. $\int \sin x^p\,dx = -\frac{\sin x^{p-1}\cos x}{p} + \frac{p-1}{p}\int \sin x^{p-2}\,dx$

2. $\int \cos x^p\,dx = \frac{\sin x\cos x^{p-1}}{p} + \frac{p-1}{p}\int \cos x^{p-2}\,dx$

3. $\int \operatorname{tg} x^p\,dx = \frac{1}{p-1}\operatorname{tg} x^{p-1} - \int \operatorname{tg} x^{p-2}\,dx$

4. $\int \operatorname{cotg} x^p dx = -\frac{1}{p-1}\operatorname{cotg} x^{p-1} - \int \operatorname{cotg} x^{p-2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin x^p} = -\frac{\cos x}{(p-1)\sin x^{p-1}} + \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\sin x^{p-2}}$

6. $\int \frac{dx}{\cos x^p} = \frac{\sin x}{(p-1)\cos x^{p-1}} + \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\cos x^{p-2}}$

Reductionsformeln für $\int x^p \cos x\,dx$ etc.

1. $\int x^p \cos x\,dx = x^p \sin x - p\int x^{p-1} \sin x\,dx$

2. $\int x^p \sin x\,dx = -x^p \cos x + p\int x^{p-1} \cos x\,dx$

3. $\int u \operatorname{arc\,sin} x\,dx = v \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{v\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wenn $\int u\,dx = v$

4. $\int u \operatorname{arc\,cos} x\,dx = v \operatorname{arc\,cos} x + \int \frac{v\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int u \operatorname{arc\,tg} x\,dx = v \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{v\,dx}{1+x^2}$

6. $\int u \operatorname{arc\,cotg} x\,dx = v \operatorname{arc\,cotg} x + \int \frac{v\,dx}{1+x^2}$

7. $\int u \log n\, x\,dx = v \log n\, x - \int \frac{v\,dx}{x}$

8. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \ldots + \ldots \pm \frac{n!}{a^n x^n}\right)$

Reductionsformeln für $\int \mathfrak{Sin}\, x^p\,dx$ etc.

1. $\int \mathfrak{Sin}\, x^p\,dx = \frac{\mathfrak{Sin}\, x^{p-1}\, \mathfrak{Cos}\, x}{p} - \frac{p-1}{p}\int \mathfrak{Sin}\, x^{p-2}\,dx$

2. $\int \mathfrak{Cos}\, x^p\,dx = \frac{\mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cos}\, x^{p-1}}{p} + \frac{p-1}{p}\int \mathfrak{Cos}\, x^{p-2}\,dx$

3. $\int \mathfrak{Tg}\, x^p\,dx = -\frac{\mathfrak{Tg}\, x^{p-1}}{p-1} + \int \mathfrak{Tg}\, x^{p-2}\,dx$

4. $\int \mathfrak{Cotg}\, x^p\,dx = -\frac{\mathfrak{Cotg}\, x^{p-1}}{p-1} + \int \mathfrak{Cotg}\, x^{p-2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x^p} = -\frac{\mathfrak{Cos}\, x}{(p-1)\,\mathfrak{Sin}\, x^{p-1}} - \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}\, x^{p-2}}$

6. $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x^p} = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{(p-1)\,\mathfrak{Cos}\, x^{p-1}} + \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x^{p-2}}$

Bestimmte Integrale.

A. Definition und allgemeine Gesetze.

1. $\int_{x_0}^{a} f(x)dx = \lim [(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) \ldots + (a - x_{n-1}) f(x_{n-1})]$ für $n = \infty$.

Zur Erläuterung:

Setzt man: $x_1 = x_0 \varrho$, $x_2 = x_0 \varrho^2 \cdots$, $x_n = a = x_0 \varrho^n$, so ist: $x_1 - x_0 = x_0(\varrho - 1)$, $x_2 - x_1 = x_0 \varrho (\varrho - 1) \cdots$, $a - x_{n-1} = x_0 \varrho^{n-1}(\varrho - 1)$ und

$\varrho^n = \frac{a}{x_0}$, also $\varrho = \sqrt[n]{\frac{a}{x_0}}$, so wie $\lim \sqrt[n]{\frac{a}{x_0}} = 1$ für $n = \infty$.

$$\alpha) \int_{x_0}^{a} x^p\, dx = \lim [(x_1 - x_0) x_0^p + (x_2 - x_1) x_1^p \cdots (a - x_{n-1}) x_{n-1}^p]$$

$$= \lim (\varrho - 1) x_0^p + i [1 + \varrho^{p+1} + \varrho^{2(p+1)} \ldots \varrho^{(n-1)(p+1)}]$$

$$= \lim (\varrho - 1)\, x_0^{p+1} \frac{\varrho^{n(p+1)} - 1}{\varrho^{p+1} - 1}$$

$$= \lim (a^{p+1} - x_0^{p+1}) : \frac{\varrho^{p+1} - 1}{\varrho - 1}$$

$$= \frac{a^{p+1} - x_0^{p+1}}{p+1}.$$

$$\beta) \int_{x_0}^{a} \frac{dx}{x} = \lim \left(\frac{x_1 - x_0}{x_0} + \frac{x_2 - x_1}{x_1} \ldots \frac{a - x_{n-1}}{x_{n-1}} \right)$$

$$= \lim (\varrho - 1) n = \log n \frac{a}{x_0}.$$

2. Setzt man: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 \cdots = a - x_{n-1} = h = \frac{a - x_0}{n}$, so ist für $n = \infty$

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\, dx = \lim [f(x_0) + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) \ldots f(a - h)]\, h.$$

Zur Erläuterung dienen die Formeln 12, 13 und 14 auf Seite 86.

3. Wenn $x = \lambda(z)$, also $dx = \frac{d\lambda(z)}{dz} dz$; $f(x)\, dx = f[\lambda(z)] \frac{d\lambda(z)}{dz} \cdot dz$ ferner $x_0 = \lambda(z_0)$, $a = \lambda(\alpha)$, dann ist

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\, dx = \int_{z_0}^{\alpha} f[\lambda(z)] \frac{d\lambda(z)}{dz} \cdot dz$$

Aus 3) und aus der Definition ergeben sich noch

4. $\int_{x_0}^{a} b f(x)\,dx = b\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx,\quad \int_{x_0}^{a}[f(x)\,dx \pm \varphi(x)dx] =$

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx \pm \int_{x_0}^{a} \varphi(x)\,dx$$

5. $\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{x_0} f(x)\,dx$

6. $\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \int_{x_0+h}^{a+h} f(x-h)\,dx$

7. $\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{hx_0}^{ha} f\left(\frac{x}{h}\right)dx$

8. $\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx$

9. Wenn $f(x)$ zwischen x_0 und a sein Zeichen nicht ändert, und μ positiv und < 1 ist, dann hat man

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\varphi(x)dx = \varphi\,[x_0 + \mu\,(a - x_0)]\int_{x_0}^{a} f(x)dx$$

10. Wenn $\int_{a}^{b} f(x)dx = \varphi(b)$, dann ist $\frac{d\varphi(b)}{db} = f(b)$ und wenn das Integral als Function der untern Grenze betrachtet wird,

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = -f(a)$$

11. Wenn in $\int_{a}^{b} f(x,t)\,dx = \varphi$ beide Grenzen von t abhängen, dann ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_{a}^{b} \frac{df(x,t)}{dt}\,dx + f(b,t)\,\frac{db}{dt} - f(a,t)\,\frac{da}{dt}$$

12. Wenn $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b stetig und $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$ ist, dann ist

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Findet bei $x = c$ eine Unterbrechung der Stetigkeit statt und ist $b > c > a$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi_{(b)} - \varphi_{(a)} + \lim\left[\varphi_{(c-p\varrho)} - \varphi_{(c+q\varrho)}\right]$$

wenn ϱ gegen Null convergirt, p und q sind unbestimmte positive Zahlen.

B. Specielle bestimmte Integrale.

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^n\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

wenn n eine gerade Zahl > 0

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^n\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}$$

wenn n eine ungerade Zahl > 1

3. $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad a > 0$$

4. $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad a > 0$$

5. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax\,dx}{x} = \pm\frac{\pi}{2},$$ je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$

6. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx\,dx}{a^2+x^2} = 0, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}, \quad a \text{ u. } b > 0$$

7. $$\int_0^{\infty} \frac{x\sin bx\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx\,dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ab})$$

a und $b > 0$

8. $$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2}\sin bx\,dx = \frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad a > 0$$

C. Die Eulerschen Integrale und die Gammafunctionen.

1. $$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a) \qquad a > 0$$

2. $$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad k > 0$$

3. $$\int_0^\infty e^{-x} x^a dx = a\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \text{ oder } \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

$\Gamma(a+1) = a!$ wenn a eine ganze Zahl.

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^{a+b}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{2a-1}\cos\varphi^{2b-1} d\varphi = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad a \text{ und } b > 0$$

5. $$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad a \text{ ein echter Bruch}$$

6. $$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi} \qquad a < \tfrac{1}{2}$$

7. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

8. $$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{q}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{q-1}{q}\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{q-1}{2}} q^{\frac{1}{2}-qa}\,\Gamma(qa), \quad q \text{ eine ganze Zahl} > 0$$

9. $$\frac{a(1+a)(2+a)\ldots(x+a)\,e^m}{(x+a)^{x+a+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^a\,\Gamma(a)} \text{ und}$$

$x!\,x^{-x-\frac{1}{2}} e^x = \sqrt{2\pi}$, wenn $x = \infty$

10. $$\log m! = \log\sqrt{2\pi} + \left(m+\frac{1}{2}\right)\log m - m + \frac{1}{12m}$$

$$+ \frac{\mu(m-1)}{64m^4}$$

angenähert, wenn μ ein echter Bruch.

D. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

$$\int_a^{a+x} f(x)\,dx = F$$

1. $2F = 2xf\left(a+\frac{x}{2}\right)$
$= x\,[f(a)+f(a+x)]$ } Genau wenn $f(x) = a + a_1 x$

2. $2F = x\,[f(a+\mu x) + f(a+\mu_1 x)]$

$\mu = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0{,}211325 \quad \mu_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = 0{,}788675$

$$6F = x\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{x}{2}\right) + f(a+x)\right]$$

$$8F = x\left\{f(a) + f(a+x) + 3\left[f\left(a+\frac{x}{3}\right) + f\left(a+\frac{2x}{3}\right)\right]\right\}$$

F genau, wenn $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

3. $$90F = x\left\{7[f(a)+f(a+x)] + 32\left[f\left(a+\frac{x}{4}\right) + f\left(a+\frac{3x}{4}\right)\right] + 12f\left(a+\frac{x}{2}\right)\right\}$$

F genau, wenn $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

4. $$18F = x\left[5[f(a+\mu x) + f(a+\mu_1 x)] + 8f\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$\mu = \frac{5-\sqrt{15}}{10} = 0{,}112702 \quad \mu_1 = \frac{5+\sqrt{15}}{10} = 0{,}887298$

$$12F = x\,(f(a) + f(a+x) + 5\,[f(a+\mu x) + f(a+\mu_1 x)])$$

$\mu = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0{,}276393 \quad \mu_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0{,}723607$

$$432F = x\left\{27[f(a) + f(a+x)] + 125\left[f\left(a+\frac{x}{5}\right) + f\left(a+\frac{4x}{5}\right) + f\left(a+\frac{x}{2}\right)\right] + 3f\left(a+\frac{x}{2}\right)\right\}$$

F genau für $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$

5. Aus der zweiten Formel in (2), durch wiederholte Anwendung, wenn $x = 2nh$ und die Functionen $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$... etc. der Reihe nach durch $f_1, f_2, f_3 \ldots$ bezeichnet werden

$$3F = h\,(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 \ldots + f_{2n+1})$$

welche Formel die Simpson'sche Regel heisst.

6. Wenn $x = nh$ und $f_p = f(a+ph)$, sowie $B_1, B_3, B_5 \ldots$ die Bernoullischen Zahlen (Seite 85) sind, so ist

$$F = h\left(\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \cdots f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right) - \left(Df_{(a+x)} - Df_{(a)}\right)\frac{B_1 h^2}{2!} + \left(D^3 f_{(a+x)} - D^3 f_{(a)}\right)\frac{B_3 h^4}{4!} - \left(D^5 f_{(a+x)} - D^5 f_{(a)}\right)\frac{B_5 h^6}{6!} + \cdots$$

7. Ist $a + 2nh = b$, so hat man:

$$\int_0^{2nh} f(a+x)dx = 2h[f(a+h)+f(a+3h)+f(a+5h)+\cdots f(b-h)]+$$

$$(Df(b) - Df(a))\frac{h^2}{6} - (D^3f(b) - D^3f(a))\frac{7h^4}{360} +$$

$$(D^5f(b)-D^5f(a))\frac{31h^6}{15120}+\cdots(D^{2\alpha-1}f(b)-D^{2\alpha-1}f(a))(-1)^{\alpha}\frac{(4^{\alpha}-2)}{(2\alpha)!}B_{2\alpha-1}h^{2\alpha}$$

E. Convergenz der Reihen und Summirung derselben.

1. Wenn die Function $\varphi_{(x)}$ immer positiv ist und dem Zahlenwerthe nach abnimmt, wenn x sich stetig von a bis ∞ ändert, so ist die Reihe:

$$\varphi_{(a)} + \varphi_{(a+1)} + \varphi_{(a+2)} + \cdots = \sum_{x=a}^{x=\infty} \varphi_{(x)} \text{ convergent,}$$

oder divergent, je nachdem $\int_a^{\infty} \varphi_{(x)}\, dx$ einen endlichen oder unendlichen Werth hat.

2. Bezeichnen B_1, B_3 B_5 die Bernoullischen Zahlen (Seite 85), so ist:

$$\sum_1^x f(x) = C + \int f(x)dx + \tfrac{1}{2}f(x) + \frac{B_1}{2!}Df(x) - \frac{B_3}{4!}D^3f(x) + \frac{B_5}{6!}D^5f(x)\cdots$$

Die Constante ist so zu bestimmen, dass die für $x = a$ durch Addition gefundene Summe gleich der rechten Seite wird.

Setzt man in D No. 7 $a = h = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich noch eine zweite Summenformel.

F. Die mehrfachen bestimmten Integrale.

1. $$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y.$$

2. $$\int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dy\right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy,$$ wenn innerhalb der Grenzen $f(x, y)$ endlich und stetig bleibt. Wird innerhalb der Grenzen $f(x, y)$ unendlich, so bedarf es einer besondern Untersuchung, um zu entscheiden, ob die Umkehrung der Integrationen gestattet ist.

3. $\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint F(u, v)\left(\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}\right)du\,dv,$
wenn $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ und $F(u, v) = f(\varphi, \psi)$ ist.

G. Die Fourier'schen Reihen und Integrale.

1. Wenn: $f(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x \ldots A_n \sin nx \ldots \pi > x > 0$

so ist: $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, f(x)\,dx$, also

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum\left(\sin nx \int_0^{\pi} \sin nx\, f(x)\,dx\right)$$

2. Wenn $f(x) = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x \cdots B_n \cos nx \cdots \pi > x > 0$

so ist: $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, f(x)\,dx$, also

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum\left(\cos nx \int_0^{\pi} \cos nx\, f(x)\,dx\right),$$ wenn man von dem Gliede, welches sich für $n = 0$ ergiebt, nur die Hälfte nimmt.

3. Ist $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ und $\psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, so ist:
$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, aus 1 und 2 hat man alsdann
$f(x) = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x \cdots B_n \cos nx + \cdots$
$A_1 \sin x + B_2 \sin 2x \cdots B_n \sin nx + \cdots \quad \pi > x > -\pi$
wobei:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,(f(x) + f(-x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, f(x)\,dx.$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,(f(x) - f(-x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, f(x)\,dx.$$

4. $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x)\,d\lambda\right)d\alpha \qquad \infty > x > -\infty$

5. Wenn $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda\right)\cos\alpha x\,d\alpha \qquad \infty > x \geq 0$$

6. Wenn $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(\lambda)\sin\alpha\lambda d\lambda\right)\sin\alpha x\, d\alpha \qquad \infty > x > 0$$

Wenn für irgend ein x in $f(x)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, so hat man in No. 4, 5 und 6 für das Doppel-Integral zu setzen

$\lim\left(\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\vartheta)}{2}\right)$, wobei ε und ϑ gegen Null convergiren.

Differenzialgleichungen.

A. Von der Form $Pdx + Qdy = 0$

1. Wenn $P = f(x)$ und $Q = \varphi(y)$, so ist

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C$$

2. Trennung der Veränderlichen

$P = f(x)\varphi(y)$ und $Q = F(x)\psi(y)$ giebt $\int\frac{f(x)\,dx}{F(x)} + \int\frac{\psi(y)\,dy}{\varphi(y)} = C$

3. Ist $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, so ist $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differenzial und

$$\int P dx + \int\left(Q - \int\frac{dP}{dy}\,dx\right)dy = C \text{ oder}$$

$$\int Q dy + \int\left(P - \int\frac{dQ}{dx}\,dy\right)dx = C$$

4. Der integrirende Factor.

Soll $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ ein vollständiges Differenzial sein, so muss $\mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) + P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} = 0$ sein

5. Wird aus No. 4 mit Hülfe von (A) einmal P, das anderemal Q eliminirt und $\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = MP = NQ$ gesetzt, so ist

$$\frac{d\mu}{\mu} = -M dy \text{ oder } \frac{d\mu}{\mu} = N dx \text{ und}$$

$$\mu = e^{-\int M dy} \text{ oder } \mu = e^{\int N dx}$$

6. $[yf(x) - \varphi(x)]\,dx + dy = 0$, giebt nach (5) $N = f(x)$, also

$$\mu = e^{\int f(x)\,dx} \text{ und}$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(C + \int e^{\int f(x)\,dx}\,\varphi(x)\,dx\right)$$

Das Integral von $dx + [xf(y) - \varphi(y)]\,dy$ ergiebt sich in derselben Weise.

7. Wenn $[f(x)\,\psi(y) - \varphi(x)]\,dx + d\psi(y) = 0$, so setze man z für $\psi(y)$.

8. $[yf(x) - y^{n+1}\varphi(x)]\,dx + dy = 0$ führt auf No. 7, wenn $\frac{1}{u}$ für y^n gesetzt wird, und man erhält

$$y^{-n} = n e^{n\int f(x)\,dx}\left(C - \int e^{-n\int f(x)\,dx}\,\varphi(x)\,dx\right)$$

9. Sind P und Q homogene Functionen desselben Grades, so setze man $y = xz$, also $dy = z\,dx + x\,dz$ und $\frac{P}{Q} = f(z)$, so ergiebt sich

$$[z + f(z)]\,dx + x\,dz = 0 \text{ und } \log n x = -\int \frac{dz}{z + f(z)}.$$

Für homogene Differenzialgleichungen ist $\mu = \frac{1}{Px + Qy}$

10. Wäre $P = ax + by + c$ und $Q = a_1 x + b_1 y + c_1$, so setze man $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$ und bestimme α und β aus den Gleichungen $a\alpha + b\beta + c = 0$ und $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$, wodurch man eine homogene Gleichung erhält.

Sollte $ab_1 - a_1 b = 0$ sein, dann setze man $ax + by = z$

11. Die Riccati'sche Gleichung $(Ax^n + By^2)\,dx + Cdy = 0$ ist integrabel, wenn n in der Form $-\frac{4m}{2m+1}$ oder $n = -\frac{4m}{2m-1}$ enthalten ist.

B. Differenzialgleichungen von der Form

$$P_0\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

1. Sind $y_1, y_2 \cdots y_n$ particuläre Integrale und $C_1, C_2 \cdots C_n$ constante Zahlen, so ist
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots C_n y_n$

2. Wenn $P_0, P_1 \cdots P_n$ constant und $Q = 0$ und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$P_0 z^n + P_1 z^{n-1} + \cdots P_{n-1} z + P_n = 0$$

a) die Wurzeln ungleich

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots C_n e^{\alpha_n x}$$

b) r gleiche Wurzeln und zwar jede gleich α und $n-r$ ungleiche $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-r}$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \cdots C_r x^{r-1}) e^{\alpha x} + B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots B_{n-r} e^{\alpha_{n-r} x}$$

3. $P_0, P_1 \cdots P_n$ und Q constant. Man differenzire die Gleichung nach x und setze $\frac{dy}{dx} = z$, so lässt sich z nach No. 2 bestimmen, wodurch auch $y = \int z\,dx$ bestimmt ist. Setzt man $y = z + Q$, so ergiebt sich ebenfalls eine Gleichung von der Form No. 2.

4. $P_0, P_1, P_2 \cdots P_n$ constant und Q eine Function von x. $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ haben dieselbe Bedeutung wie in No. 2 und ausserdem ist

$$e^{-\alpha_1 x} Q_1 = \int e^{-\alpha_1 x} Q\,dx, \quad e^{-\alpha_2 x} Q_2 = \int e^{-\alpha_2 x} Q_1\,dx,$$

$$e^{-\alpha_3 x} Q_3 = \int e^{-\alpha_3 x} Q_2\,dx \text{ etc.}$$

a) bei ungleichen Wurzeln

$$y = Q_n + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots C_n e^{\alpha_n x}$$

b) wenn r Wurzeln gleich α

$$y = Q_n + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots C_{n-r} e^{\alpha_{n-r} x} + (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 \cdots B_r x^{r-1}) e^{\alpha x}$$

5. Wenn $P_0, P_1, \cdots P_n$ der Reihe nach $A_0 x^n, A_1 x^{n-1}, \cdots A_{n-1} x, A_n$ sind, wobei $A_0, A_1 \cdots A_n$ constant, so setze man $x = e^u$, wodurch die Gleichung auf die Form in No. 4 zurückgeführt wird. Es ist alsdann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot x^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) \cdot x^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{du^3} - 3\frac{d^2y}{du^2} + 2\frac{dy}{du}\right) \cdot x^{-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{d^4y}{du^4} - 6\frac{d^3y}{du^3} + 11\frac{d^2y}{du^2} - 6\frac{dy}{du}\right) \cdot x^{-4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \left(\frac{d^5y}{du^5} - 10\frac{d^4y}{du^4} + 35\frac{d^3y}{du^3} - 50\frac{d^2y}{du^2} + 24\frac{dy}{du}\right) \cdot x^{-5}$$

Die Coefficienten von $\frac{d^ry}{du^r}, \frac{d^{r-1}y}{du^{r-1}}, \cdots$ in der Entwickelung von $\frac{d^ry}{dx^r}$ sind der Reihe nach die Coefficienten der nach fallenden Potenzen von z geordneten Factorielle

$$z^{|r-1} = (z-1)(z-2)\cdots(z-r+1)$$

Zur Bestimmung von $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ hat man die Gleichung

$$A_0 z^{n|-1} + A_1 z^{n-1|-1} + A_2 z^{n-2|-1} + \cdots A_{n-1} z + A_n = 0$$

6. Sind P_0, $P_1 \cdots P_n$ der Reihe nach

$$A_0 (a + bx)^n,\ A_1 (a + bx)^{n-1} \cdots A_n,$$

so setze man

$$a + bx = bx', \text{ also } x' = x + \frac{a}{b}$$

wodurch man auf No. 5 zurückkommt.

7. Variation der Constanten. Wenn in der allgemeinen Gleichung (B) Q eine Function von x ist und $y_1, y_2, \cdots y_n$ die particulären Integrale dieser Gleichung für $Q = 0$ sind, dann ist für die allgemeine Gleichung

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots u_n y_n$$

$u_1, u_2 \cdots u_n$ sind aus den Gleichungen

$$y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \cdots y_n \frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \cdot \frac{du_2}{dx} + \cdots \frac{dy_n}{dx} \cdot \frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} \cdot \frac{du_2}{dx} + \cdots \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \cdot \frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{du_2}{dx} + \cdots \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{du_n}{dx} = Q$$

zu bestimmen.

8. Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen. Man bestimme aus der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}} \cdots$ so hat man nach dem Mac-Laurin'schen Satze

$$y = y^0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} \cdots \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

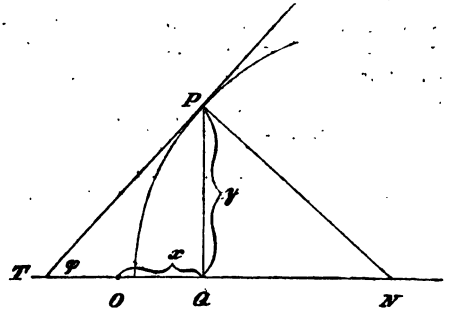
in welcher Reihe $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdots$ bis $\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_0$ willkürlich bleiben.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten kann ebenfalls zur Reihenentwicklung von y benutzt werden.

9. Man nennt solche Ausdrücke, welche einer Differenzialgleichung genügen, ohne in dem vollständigen Integrale derselben enthalten zu sein, besondere Auflösungen der Differenzialgleichung.

Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf Geometrie.

A. Ebene Curven.



1. Wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, so ist

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$$

φ der Winkel, welchen die Berührungslinie im Punkte $P(x, y)$ mit der positiven xAxe bildet.

$$\sin\varphi = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \text{ stets positiv}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{y'}$$

2. Bezeichnet s den Bogen von der xAxe bis P, so ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1+y'^2)\,dx^2 = \frac{(1+y'^2)\,dy^2}{y'^2}, \quad \frac{ds}{dx} = s'$$

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'} \qquad \cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{s'}$$

3. ξ und η seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente oder Normale, so hat man

$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$ als Gleichung der Tangente im Punkte P

$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x)$ „ „ Normale „ „ „

4. Wenn $f(x, y) = f = 0$ die Gleichung der Curve, so ist

$(\xi - x)\frac{df}{dx} + (\eta - y)\frac{df}{dy} = 0$ die Gleichung der Tangente und

$(\xi - x)\frac{df}{dy} - (\eta - y)\frac{df}{dx} = 0$ die Gleichung der Normale.

5. Macht man $f(x, y)$ durch Einführung einer Veränderlichen t homogen, so ist die Gleichung der Tangente

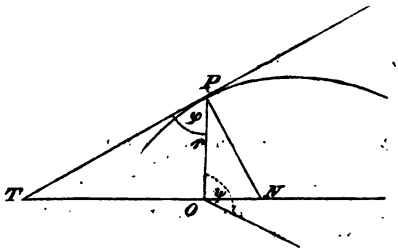
$$\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \tau \frac{df}{dt} = 0 \quad (t = \tau = 1)$$

6. Es ist Tangente $PT = y \operatorname{cosec} \varphi$, Normale $PN = y \sec \varphi$
Subtangente $QT = y \operatorname{cotg} \varphi$, Subnormale $QN = y \operatorname{tg} \varphi$

7. Ist eine Curve gegeben durch die Gleichungen $y = f(t)$ und $x = \psi(t)$, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt} : \frac{d\psi}{dt}$$

8. Wenn $r = f(\psi)$ die Polargleichung einer Curve und φ der Winkel zwischen Tangente und Radiusvector ist, dann hat man



$$\sin \varphi = \frac{r\,d\psi}{ds} = \frac{r}{s'}, \quad \cos \varphi = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{s'}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{r\,d\psi}{dr} = \frac{r}{r'}$$

$$ds^2 = r^2\,d\psi^2 + dr^2 = (r^2 + r'^2)\,d\psi^2 = \frac{(r^2 + r'^2)\,dr^2}{r'^2}$$

9. Wenn NT senkrecht ist zum Radiusvector des Punktes P.

$$\text{Tangente } PT = r \sec \varphi = \frac{r\,ds}{dr} = \frac{r s'}{r'}$$

$$\text{Normale } PN = r \operatorname{cosec} \varphi = \frac{ds}{d\psi} = s'$$

$$\text{Subtangente } OT = r \operatorname{tg} \varphi = \frac{r^2\,d\psi}{dr} = \frac{r^2}{r'}$$

$$\text{Subnormale } ON = r \operatorname{cotg} \varphi = \frac{dr}{d\psi} = r'$$

10. Krümmungsradius.

a) Allgemeine Formeln für denselben:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - d^2x\,dy} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}$$

b) Wenn dx constant

$$\varrho = \pm (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y'' = s'^3 : y'' \quad \left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

c) Wenn ds constant

$$\varrho = ds : \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

d) Bei Polarcoordinaten

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 - rr'' + 2r'^2} = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u + u'')} = \frac{u^3 s'^3}{u + u''}$$

wenn $u = \frac{1}{r}$ und $r'' = \frac{d^2 r}{d\psi^2}$, $u'' = \frac{d^2 u}{d\psi^2}$

e) Wenn die Gleichung $f(x, y)$ homogen gemacht ist und

$$\frac{df}{dx} = X_1, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = X_2, \quad \frac{d^2 f}{dy\,dt} = X_3$$

$$\frac{df}{dy} = Y_1, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = Y_2, \quad \frac{d^2 f}{dx\,dt} = Y_3$$

$$\frac{df}{dt} = T_1, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = T_2, \quad \frac{d^2 f}{dx\,dy} = T_3$$

$$\varrho = (X_1^2 + Y_1^2)^{\frac{3}{2}} : (X_1^2 Y_2 - 2X_1 Y_1 T_3 + X_2 Y_1^2), \; (t = 1)$$

11. Sind ξ und η die Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung, so ist

$$\xi = x \mp \varrho \sin \varphi, \quad \eta = y \pm \varrho \cos \varphi;$$

das obere oder untere Zeichen gilt je nachdem $y'' > 0$ oder < 0 ist.

12. Die Gleichung der Evolute ergiebt sich, wenn aus den Gleichungen

$f(x,y) = 0$, $(\xi - x)dx + (\eta - y)dy = 0$ und $(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y = ds^2$

x und y eliminirt werden.

13. Bestimmung der Asymptoten.

a) Wenn $y = f(x)$ und $\eta = p\xi + q$ die Gleichung der Asymptote, dann ist $p = \lim f'(x)$ und $q = \lim [f(x) - xf'(x)]$ für $x = \infty$

b) Wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve ist. Man setze px für y in $f(x, y)$ und setze $x = \infty$, nachdem die Gleichung durch die höchste Potenz von x dividirt ist. Die Grenzgleichung giebt die Werthe von p. Ferner setze man $px + q$ für y in $f(x, y)$ und lasse x wiederum unendlich werden, wodurch man eine Gleichung zur Bestimmung von q erhält.

c) Bei Polarcoordinaten dividirt man die Gleichung $f(r, \psi) = 0$ durch die höchste Potenz von r und lässt alsdann r unendlich werden, so ist das aus der Grenzgleichung sich ergebende ψ der Winkel zwischen Asymptote und Polaraxe. Der Abstand der Asymptote vom Pol ist gleich der Subtangente.

14. Lauf der Curve im Allgemeinen.

Wenn $y' > 0$ so wächst y mit wachsendem x

„ $y' < 0$ so nimmt y ab mit wachsendem x

„ $y' = 0$ so ist die Tangente ∥ der XAxe

„ $y = \infty$ so ist die Tangente ∥ der YAxe

In irgend einem Punkte kehrt die Curve der XAxe ihre erhabene

oder hohle Sete zu, je nachdem für diesen Punkt die erste nicht verschwindende Ableitung von y, y'' oder von gerader Ordnung ist und mit y gleiches oder ungleiches Vorzeichen hat.

15. Die Curve hat Wendepunkte in den Punkten, deren Coordinaten y' zu einem Maximum oder Minimum machen.

16. Bei Polarcoordinaten ergeben sich die Wendepunkte aus

$$u + u'' = 0 \text{ und } f(r, \psi) = 0$$

17. Bei homogen gemachten Gleichungen ergeben sich die Wendepunkte durch

$$\begin{vmatrix} X_2 & T_3 & Y_3 \\ T_3 & Y_2 & X_3 \\ Y_3 & X_3 & T_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } f(x, y, t) = 0 \qquad t = 1$$

No. 16 und 17 geben auch Punkte, welche nicht eigentliche Wendepunkte sind.

18. Wird y' unbestimmt, so ergeben sich die Coordinaten der Punkte P, für welche dieses eintritt, aus den Gleichungen $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$ mit Berücksichtigung von $f(x, y) = 0$. Zur Ermittlung von y' differenzire man $f(x, y) = 0$ wiederholt. Jedem reellen Werthe von y' entspricht ein Zweig der Curve. Sind die Werthe von y' reell und ungleich, dann ist der Punkt P ein vielfacher Punkt; sind aber die Wurzeln imaginair, dann ist der Punkt P ein isolirter. Wenn unter den Werthen von y' gleiche vorhanden sind, so kann der Punkt P ein vielfacher, ein Rückkehr- oder ein isolirter Punkt sein. Die nähere Bestimmung dieser Punkte erfordert eine specielle Untersuchung der Curve in der Nähe des Punktes P.

19. Berührungen von Curven. Wenn zwei Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ einen gemeinschaftlichen Punkt haben, und es sind für diesen Punkt die Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur n^{ten} inclusive einander gleich, so haben diese Curven eine Berührung n^{ter} Ordnung.

20. Umhüllungslinien. $f(x, y, p) = 0$ giebt bei einem bestimmten p eine bestimmte Curve, bei veränderlichem p ein System von Curven. Diese Curven werden berührt von der Curve, deren Gleichung das Resultat der Elimination von p aus $f(x, y, p) = 0$ und $\frac{df(x, y, p)}{dp} = 0$ ist. p muss sich als abhängig von x oder y ergeben.

21. Differenzial der Fläche F.

a) bei rechtwinkligen Coordinaten

$$dF = y\,dx = f(x)\,dx$$

b) bei Polarcoordinaten

$$dF = \frac{r^2}{2}\,d\psi$$

22. Die Rectification und Quadratur der Curven erfolgt durch Integration der Ausdrücke ds und dF in No. 2, 8 und 21.

Für die näherungsweise Berechnung siehe bestimmte Integrale.

B. Curven doppelter Krümmung.

1. Gleichungen der Curven im Raume

a) $x = f(t),\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t)$

$$A = y'z'' - y''z',\ B = x'z'' - x''z',\ C = x'y'' - x''y',$$
$$m = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Ableitungen sind nach t genommen.

b. $y = f(x),\ z = F(x)$

c. $f(x, y, z) = 0,\ F(x, y, z) = 0$

f_1, f_2, f_3 und F_1, F_2, F_3 bezeichnen der Reihe nach die Ableitungen der vorstehenden Functionen nach x, y, z

$$P_1 = f_2 F_3 - f_3 F_2,\ P_2 = f_3 F_1 - f_1 F_3,\ P_3 = f_1 F_2 - f_2 F_1,$$
$$Q = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$$

d. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, so ist

$$m = s' \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}$$
$$= s'^2 \sqrt{\left(\frac{x'}{s'}\right)'^2 + \left(\frac{y'}{s'}\right)'^2 + \left(\frac{z'}{s'}\right)'^2}$$

2. Gleichung der Tangente im Punkte $P(x, y, z)$

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} \text{ oder}$$
$$\frac{\xi - x}{P_1} = \frac{\eta - y}{P_2} = \frac{\zeta - z}{P_3}$$

α, β, γ die Winkel der Tangente mit den Axen.

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{P_1}{Q},\ \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{P_2}{Q},\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{P_3}{Q}$$

3. Die Gleichung der Normalebene im Punkte P.

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0 \text{ oder}$$
$$(\xi - x)\,P_1 + (\eta - y)\,P_2 + (\zeta - z)\,P_3 = 0$$

4. Gleichung der Osculations- oder Schmiegungsebene.

$$(\xi - x)\,A + (\eta - y)\,B + (\zeta - z)\,C = 0$$

Die Normale zu derselben

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}$$

λ, μ und ν die Winkel dieser Normale mit den Axen

$$\cos\lambda = \frac{A}{m},\ \cos\mu = \frac{B}{m},\ \cos\nu = \frac{C}{m}$$

5. Die Hauptnormale ist der Durchschnitt der Normalebene mit der Schmiegungsebene.

Gleichung der Hauptnormale: $\dfrac{\xi - x}{d\frac{x'}{s'}} = \dfrac{\eta - y}{d\frac{y'}{s'}} = \dfrac{\zeta - z}{d\frac{z'}{s'}}$

Die Ebene senkrecht zu dieser Normale.

$$(\xi - x)\,d\frac{x'}{s'} + (\eta - y)\,d\frac{y'}{s'} + (\zeta - z)\,d\frac{z'}{s'} = 0$$

6. Der Contingenzwinkel $d\theta_1$ ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Tangenten

$$d\theta_1 = \frac{m\,ds}{s'^3}$$

7. Der Torsionswinkel $d\theta_2$ ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Schmiegungsebenen

$$d\theta_2 = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$
$$= \frac{(Ax''' + By''' + Cz''')\,ds}{A^2 + B^2 + C^2}$$

8. Der erste Krümmungsradius ϱ_1

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\theta_1} = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}$$

Wenn $t = s$, also ds constant

$$\varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$$

9. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Endpunkts von ϱ_1 in der Hauptnormale des des Krümmungsmittelpunktes, so ist

$$\frac{\xi - x}{\left(\frac{x'}{s'}\right)'} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{y'}{s'}\right)'} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{z'}{s'}\right)'} = \frac{\varrho_1^{\,2}}{s'} \quad \text{und wenn } t = s$$

$$\frac{\xi - x}{x''} = \frac{\eta - y}{y''} = \frac{\zeta - z}{z''} = \varrho_1^{\,2}$$

10. Der zweite Krümmungsradius ϱ_2

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\theta_2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{Ax''' + By''' + Cz'''}$$

11. Wenn $Ax''' + By''' + Cz''' = 0$, so ist die Curve eine ebene Curve. Die vorstehende Bedingung lässt sich ersetzen durch

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

12. Das Differenzial des Bogens in Polarcoordinaten

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\gamma^2 + r^2 \sin^2\gamma\, d\delta^2$ Siehe Seite 146.

C. Krumme Flächen.

1. Gleichungen und Bezeichnungen.

a. $f(x, y, z) = 0$; f_1, f_2, f_3, die Ableitungen nach x, y, z

$$N^2 = f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + f_3^{\,2}$$

b. $z = f(x, y)$

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

$$n^2 = p^2 + q^2 + 1$$

2. Gleichungen für die Berührungsebene an P, (x, y, z)

$$(\xi - x) f_1 + (\eta - y) f_2 + (\zeta - z) f_3 = 0$$

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

Macht man $f(x, y, z) = 0$ durch t homogen und ist $\frac{df}{dt} = f_4$, so ist die Gleichung der Berührungsebene

$$\xi f_1 + \eta f_2 + \zeta f_3 + \tau f_4 = 0, \quad (t = \tau = 1)$$

3. Gleichungen für die Normale im Punkte P

$$\frac{\xi - x}{f_1} = \frac{\eta - y}{f_2} = \frac{\zeta - z}{f_3}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}$$

4. Winkel der Normale mit den Axen λ, μ, ν

$$\cos\lambda = \frac{f_1}{N} = \frac{p}{n}, \quad \cos\mu = \frac{f_2}{N} = \frac{q}{n}, \quad \cos\nu = \frac{f_3}{N} = -\frac{1}{n}$$

5. $n^3 \frac{d\cos\lambda}{dx} = (1 + q^2) r - p q s$, $n^3 \frac{d\cos\lambda}{dy} = (1 + q^2) s - p q t$

$= n^3 u$ $\qquad$ $= n^3 v$

6. $n^3 \frac{d\cos\mu}{dy} = (1 + p^2) t - p q s$, $n^3 \frac{d\cos\mu}{dx} = (1 + p^2) s - p q r$

$= n^3 u_1$ $\qquad$ $= n^3 v_1$

7. $n^4 \left(\frac{d\cos\lambda}{dx} \cdot \frac{d\cos\mu}{dy} - \frac{d\cos\lambda}{dy} \cdot \frac{d\cos\mu}{dx} \right) = rt - s^2 = n^4 \varrho$

8. $n^3 \left(\frac{d\cos\lambda}{dx} + \frac{d\cos\mu}{dy} \right) = [(1 + p^2) t + (1 + q^2) r - 2 p q s] = n^3 h$

9. Tangente eines Normalschnitts durch P, α, β, γ, die Winkel derselben mit den Axen

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}$$

$$p \cos\alpha + q \cos\beta = \cos\gamma$$

10. ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts durch P, ϱ_1 der Krümmungshalbmesser einer durch P gehenden Curve, welche mit dem Normalschnitt dieselbe Tangente hat. Das Differenzial des Bogens der Curve constant, so ist

$$\cos(\varrho, \varrho_1) = \frac{\varrho_1}{n} (p x'' + q y'' - z'')$$

$$= -\frac{\varrho_1}{n} (r x'^2 + 2 s x' y' + t y'^2)$$

$$= -\frac{\varrho_1}{n} (r \cos^2\alpha + 2 s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta)$$

11. $$\varrho = -\frac{n}{r \cos^2\alpha + 2 s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta}$$

12. $$\varrho_1 = \varrho \cos(\varrho, \varrho_1)$$

13. Das Maximum und Minimum von ϱ, die Hauptkrümmungshalbmesser, sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}[\varrho t - n(1+q^2)]\cos\beta &= (pqn - \varrho s)\cos\alpha\\ [\varrho r - n(1+p^2)]\cos\alpha &= (pqn - \varrho s)\cos\beta\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{h}{\varrho} + g = 0$$

Die letzte Gleichung erhält man durch Multiplication der beiden ersten.

14. Für die Hauptschnitte ist, wenn die XY-Ebene $\perp$ der Berührungsebene in P.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Die Hauptschnitte stehen senkrecht auf einander.

15. Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte und ϱ der eines Normalschnittes, welcher mit dem zu ϱ_1 gehörigen Schnitt den Winkel φ bildet, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}$$

16. Gehören ϱ' und ϱ'' zwei auf einander senkrechten Normalschnitten an, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

17. Das Maass der Krümmung im Punkte P ist $\dfrac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$.

18. Die Differenzialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die Ebene XY ist

$$v\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (u - v_1)\frac{dy}{dx} - v_1 = 0$$

19. Quadratur und Cubatur der Flächen.

F die Fläche, V das Volumen

$$dF = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy = r\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2\right]\sin^2\gamma + \left(\frac{dr}{d\delta}\right)^2}\,d\gamma\,d\delta$$

$$dV = dx\,dy\,ds = s\,dx\,dy = r^2\sin\gamma\,dr\,d\gamma\,d\delta$$

20. Bei Rotationsflächen, wenn X die Umdrehungsaxe und $y = f(x)$ die Gleichung der erzeugenden Curve ist

$$dF = 2y\pi\,ds, \quad dV = y^2\pi\,dx$$

D. Kegelschnitte.

a. Parabel.

1. Die Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung und Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{4x}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4N^3}{p^2}$$

wenn N die Normale bis zur XAxe. Die letzte Formel gilt für alle Kegelschnitte.

$$\xi = 3x + \frac{p}{2}, \quad \eta = (2x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{p}{2}}$$

2. Die Gleichung der Evolute.

$$27 p \eta^2 = 16 \left(\xi - \frac{p}{2}\right)^3 \quad \text{(Neil'sche Parabel)}$$

3. Der Bogen zur Abscisse x vom Scheitel an gerechnet.

$$s = \sqrt{x\left(x + \frac{p}{4}\right)} + \frac{p}{4} \log \left(\sqrt{1 + \frac{4x}{p}} + \sqrt{\frac{4x}{p}}\right)$$

Setzt man $x = \frac{p}{4} \operatorname{Sin} \psi^2$, so ist $y = \frac{p}{2} \operatorname{Sin} \psi$

$$s = \frac{p}{8} (2\psi + \operatorname{Sin} 2\psi)$$

4. Der Mantel des Rotationsparaboloids.

$$M = \frac{\pi}{6} \left(\frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p} - p^2\right)$$

b. **Die Ellipse, nebst Bemerkung über die elliptischen Integrale.**

1. Krümmungsmittelpunkt.

$$\varrho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{b^2}{a} (1 - \varepsilon^2 \sin \psi^2)^{-\frac{3}{2}}, \text{ wenn}$$

$\varepsilon = \frac{e}{a}$ und ψ der Winkel, welchen die Normale mit der XAxe bildet.

$$\xi = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}$$

2. Gleichung der Evolute.

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

3. Der Bogen s, wenn $x = a \sin \varphi$

$ds = \sqrt{a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi$ und

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}\, d\varphi$$

Wenn $A_m = \cos \frac{a^2}{2} \sum_{r=0}^{r=\infty} (\tfrac{1}{4})_r (\tfrac{1}{2})_{r+m} \operatorname{tg} \frac{a}{2}^{4r+2m}$; $\sin \alpha = \varepsilon$, so ist

$$\frac{s}{a} = A_0 \varphi + A_1 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} A_2 \sin 4\varphi + \ldots \frac{1}{m} A_m \sin 2m\varphi + \ldots$$

4. Bezeichnet P den ganzen Umfang, so ist

$$\frac{P}{a} = 2\pi \cos\frac{\alpha^2}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha^4}{2} + \left(\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha^8}{2} + \left(\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha^{12}}{2} + \cdots\right]$$

Siehe Tabelle Seite 54.

5. Setzt man für $\frac{a-b}{2(a+b)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2} = \mu$,

so hat man angenähert

$$P = (a+b)\pi\left(1 + \mu^2 + \frac{\mu^4}{4(1-\mu^2)}\right)$$

6. Oberfläche des Rotationsellipsoids.

Bei Drehung um die grosse Axe

$$O = 2b\pi\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

Bei Drehung um die kleine Axe

$$O = \pi\left(2a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\operatorname{logn}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

Bemerkung über die elliptischen Integrale.

1. Das Integral $\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}\,d\varphi$ ist ein specieller Fall der Integrale $\int f(x, R)\,dx$, wenn $R = \sqrt{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4}$ ist. Bezeichnet man $\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}$ durch $\Delta(\varepsilon, \varphi)$ oder auch kürzer durch Δ, so ergeben sich, nach der Bezeichnung von Legendre, aus dem allgemeinen Integrale:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = F(\varepsilon, \varphi);\quad \int_0^{\varphi}\Delta\,d\varphi = E(\varepsilon, \varphi);\quad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta} = \Pi(\varphi, n)$$

welche Integrale elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung genannt werden. $\varepsilon = \sin\alpha$ heisst der Modul, φ die Amplitude, n der Parameter.

2. Bezeichnet man $\int\frac{\sin\varphi^{2r}\,d\varphi}{\Delta}$ mit P_{2r}, so ist, wenn r eine positive oder negative ganze Zahl:

$$(2r-3)P_{2r-4} - (1+\varepsilon^2)(2r-2)P_{2r-2} + (2r-1)\varepsilon^2 P_{2r} = \Delta\cos\varphi\sin\varphi^{2r-3}$$

3. Wenn $\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)^r\Delta} = \Pi_r$; so hat man

$$(2r-2)\left(1+\frac{1+\varepsilon^2}{n}+\frac{\varepsilon^2}{n^2}\right)\Pi_r-(2r-3)\left(1+\frac{2(1+\varepsilon^2)}{n}+\frac{3\varepsilon^2}{n^2}\right)\Pi_{r-1}$$
$$+(2r-4)\left(\frac{1+\varepsilon^2}{n}+\frac{3\varepsilon^2}{n^2}\right)\Pi_{r-2}-(2r-5)\frac{\varepsilon^2}{n^2}\Pi_{r-3}$$
$$=\frac{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)^{r-1}}$$

4. Reihen von Gauss zur Berechnung von $\int\Delta^n d\varphi$, wenn n eine beliebige reelle Zahl.

$$\int_0^{\varphi}\Delta^n d\varphi = K_0\varphi + K_1\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}K_2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}K_3\sin 6\varphi + \cdots$$
$$\frac{1}{m}K_m\sin 2m\varphi + \cdots$$

K_m kann man der Reihe nach gleich A_m, B_m, C_m, D_m setzen, wenn

$$A_m = \cos\frac{\alpha}{2}^{4n}\sum_{s=0}^{s=\infty}(n)_s\,(n)_{s+m}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}^{4s+2m}$$

$$B_m = \sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\cdot\frac{(n)_{s+m}\,(2s+2m)_s\sin\alpha^{2s+2m}}{2^{2s+2m}}$$

$$C_m = \cos\alpha^{2n}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n)_{s+m}\,(2s+2m)_s}{2^{2s+2m}}\,\mathrm{tg}\,\alpha^{2s+2m}$$

$$D_m = (1-\tfrac{1}{2}\sin\alpha^2)^n\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n)_{2s+m}\,(2s+m)_s}{2^{2s+m}\,(2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2-1)^{2s+m}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta^n d\varphi = \frac{\pi}{2}K_0$$

$$=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\alpha}{2}^{4n}\left(1+(n)_1^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}^4+(n)_2^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}^8+(n)_3^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}^{12}+\ldots\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1+(-\tfrac{1}{2})_1(n)_1\sin\alpha^2+(-\tfrac{1}{2})_2(n)_2\sin\alpha^4+(-\tfrac{1}{2})_3(n)_3\sin\alpha^6+\ldots\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cos\alpha^{2n}\left[1-(\tfrac{1}{2})_1(n)_1\,\mathrm{tg}\,\alpha^2+(-\tfrac{1}{2})_2(n)_2\,\mathrm{tg}\,\alpha^4-(-\tfrac{1}{2})_3(n)_3\,\mathrm{tg}\,\alpha^6\ldots\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-\tfrac{1}{2}\sin\alpha^2)^n\left(1-\frac{(-\tfrac{1}{2})_1(n)_2}{(2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2-1)^2}+\frac{(-\tfrac{1}{2})_2(n)_4}{(2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2-1)^4}\right.$$
$$\left.-\frac{(-\tfrac{1}{2})_3(n)_6}{(2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2-1)^6}+\ldots\right)$$

14. Die Bemerkung in No. 11 gilt auch für 12 und 13.

15. Kreisvolvente. Wickelt sich ein Kreisbogen von einem Kreise ab, so dass er stets Tangente bleibt, so beschreibt sein Endpunkt diese Curve.

Der Mittelpunkt des Kreises ist der Anfangspunkt der Coordinaten, der Radius nach dem Anfangspunkte des sich abwickelnden Bogens die YAxe und φ der Winkel, welcher dem abgewickelten Bogen entspricht, so ist, wenn a der Radius des Kreises, die Länge des abgewickelten Bogens gleich $a\varphi$ und

$$x = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \quad y = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$
$$r^2 = a^2(1 + \varphi^2)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Wahrscheinlichkeit aus Gründen.

(a priori)

1. Sind unter n gleich möglichen Fällen a dem Eintreffen eines Ereignisses günstig, so heisst der Quotient $w = \frac{a}{n}$ die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses; $w_1 = 1 - w$ heisst die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

2. Wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2, E_3 ... gleich w_1, w_2, w_3 .... sind und $w_1 + w_2 + w_3 \ldots = 1$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen einzelner dieser Ereignisse gleich der Summe ihrer absoluten Wahrscheinlichkeiten.

3. Relative Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 eintreffe und nicht E_2, ist $w = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 und E_2 eintreffen und nicht E_3, ist

$$w = \frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2 + w_3} \text{ etc.}$$

4. Wenn $w_1, w_2, w_3 \ldots$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2, E_3 ... sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen dieser Ereignisse $w = w_1 w_2 w_3 \ldots$.

5. Sind für ein Ereigniss die Wahrscheinlichkeiten bei verschiedenen Voraussetzungen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ und ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in jeder dieser Voraussetzungen der Reihe nach, w_1, w_2, w_3, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses $w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \ldots$

6. Sind α und β die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse A und B, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass A $n$mal und B $m$mal in bestimmter Reihenfolge eintreten,

$$w = \alpha^n \beta^m$$

Ist die Reihenfolge eine beliebige, so ist

$$w = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}\alpha^n\beta^m$$

7. Ist $\alpha + \beta = 1$ und $n + m = r$, so stellt die Entwickelung von $(\alpha + \beta)^r$ der Reihe nach die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen von

A r mal
A $r-1$ mal nnd B 1 mal
A $r-2$ mal und B 2 mal
. . . . . .
A 1 mal und B $r-1$ mal
B r mal dar.

8. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei r maliger Wiederholung der Ereignisse A und B in No. 7 A wenigstens einmal eintritt ist $1 - \beta^r$. Soll diese Wahrscheinlichkeit gleich γ sein, so muss

$$r = \frac{\log(1-\gamma)}{\log \beta}$$ werden.

B. Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen.

(a posteriori)

Die Wahrscheinlichkeiten der Voraussetzungen verhalten sich wie die Wahrscheinlichkeiten, welche die beobachteten Ereignisse selbst nach jeder von den Voraussetzungen hatten. Sind w_1, w_2, w_3 die Wahrscheinlichkeiten der nach den beobachteten Erfolgen möglichen Voraussetzungen, $v_1, v_2, v_3 \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Erfolges nach denselben, so ist

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_n = 1 \text{ und}$$

$$\frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} = \ldots \frac{w_n}{v_n} = \frac{1}{v_1 + v_2 \ldots v_n}$$

C. Methode der kleinsten Quadrate.

1. Bezeichnet $\varphi_{(\Delta)}$ die Häufigkeit des Fehlers Δ; so ist

$$\varphi_{(\Delta)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$$

2. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ ist

$$v = \varphi_{(\Delta)} d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

3. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null verhält sich zu der des Fehlers Δ wie

$$1 : e^{-h^2\Delta^2}$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Beobachtungsfehler zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liegt, ist

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\Delta} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta \text{ oder auch}$$

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \text{ wenn } h\Delta = t \quad \text{(Tabelle Seite 29)}$$

5. Wenn bei einer andern Beobachtung

$$w_1 = \frac{2h_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta_1} e^{-h^2_1 \Delta_1^2} d\Delta_1 \text{ ist, so ist}$$

$$w = w_1 \text{ wenn } h\Delta = h_1\Delta_1$$

Ist $h = nh_1$, so wird $n\Delta = \Delta_1$, d. h. bei der zweiten Beobachtungsreihe hat der Fehler $n\Delta$ dieselbe Wahrscheinlichkeit wie der Fehler Δ im ersten Falle. Die Constante h heisst das Maass der Präcision der Beobachtungen.

6. Den Fehler, für welchen $w = \frac{1}{2}$ ist, nennt man den wahrscheinlichen Fehler; derselbe sei r, so ist, wenn aus

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}, \quad \varrho = 0{,}47694$$

gefunden worden, wegen $hr = \varrho$, $r = \frac{\varrho}{h}$

7. Aus $r = \frac{\varrho}{h}$ und $\Delta = \frac{t}{h}$ folgt $\Delta = r \cdot \frac{t}{\varrho}$ Die Tabelle auf Seite 29 mit dem Argument $\frac{t}{\varrho}$ giebt die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler Δ die Grösse $\frac{t}{\varrho} \cdot r$ nicht überschreite.

8. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ bei einer Beobachtungsreihe eingetreten sind, ist

$$W = \left(\frac{h\,d\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \ldots \Delta_n^2)}$$

Haben die Fehler wirklich stattgefunden, so ist dasjenige h das wahrscheinlichste, für welches W ein Maximum ist. Setzt man

$$\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \ldots \Delta_n^2}{n} = \varepsilon^2$$

so ist für diesen Fall

$$\frac{1}{h} = \varepsilon\sqrt{2}$$

$$\text{also } r = 0{,}47694\sqrt{2} \cdot \varepsilon = 0{,}67449\,\varepsilon$$

ε wird der mittlere Fehler genannt.

9. Wenn h constant, dann wird W ein Maximum, wenn

$$\Sigma\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 \ldots \Delta_n^2$$

ein Minimum ist.

10. Hat man verschiedene Beobachtungsreihen, so muss

$$\Sigma h^2\Delta^2 = h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2 \ldots h_n^2\Delta_n^2$$

ein Minimum werden, wenn W ein Maximum sein soll. Um diesen Fall auf 9. zurück zu führen, setzt man

$$\frac{h_1^2}{h^2} = g_1, \quad \frac{h_2^2}{h^2} = g_2 \ldots, \quad g_1, g_2 \ldots g_n \text{ ganze Zahlen}$$

und erhält alsdann

$$h_1^2 \Delta_1^2 + h_2^2 \Delta_2^2 \ldots h_n^2 \Delta_n^2 = h^2 (g_1 \Delta_1^2 + g_2 \Delta_2^2 \ldots g_n \Delta_n^2)$$

$g_1, g_2 \ldots g_n$ nennt man die Gewichte der Beobachtungsreihen.

11. Soll durch directe Messung eine Grösse x bestimmt werden und sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ die erhaltenen Werthe, dann sind $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ der Reihe nach

$$x - a_1, \; x - a_2 \ldots x - a_n$$

Es wird $h_1^2 (x - a_1)^2 + h_2^2 (x - a_2)^2 \ldots h_n^2 (x - a_n)^2$ ein Minimum, wenn

$$x = \frac{a_1 h_1^2 + a_2 h_2^2 + \ldots a_n h_n^2}{h_1^2 + h_2^2 \ldots h_n^2} = \frac{\Sigma a h^2}{\Sigma h^2} = \frac{\Sigma a g}{\Sigma g}$$

wenn $g_1, g_2 \ldots$ die Gewichte sind.

Für $h_1 = h_2 = \ldots h_n$ wird

$$x = \frac{a_1 + a_2 \ldots a_n}{n}$$

das arithmetische Mittel aus den beobachteten Grössen.

Das Maass der Präcision ist

$$H = \sqrt{\Sigma h^2}$$

und der wahrscheinliche Fehler von x

$$R = \frac{\varrho}{\sqrt{\Sigma h^2}}$$

Bei Beobachtungen von gleicher Güte

$$R = \frac{\varrho}{h\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}67449\,\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Ferner kann man 1 gegen 1 wetten, dass R zwischen

$$R\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } R\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \text{ liege.}$$

12. $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ die aus dem arithmetischen Mittel sich ergebenden Δ, so ist der wahrscheinlichste Werth für den mittlern Fehler ε gegeben durch

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n-1}}$$

13. Wenn n sehr gross, dann erhält man, wenn auch nicht genau, doch sehr bequem den wahrscheinlichen Fehler R in folgender Weise. Man ordne die sämmtlichen Fehler der Grösse nach, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen zu nehmen, dann ist, wenn n ungerade, der mittelste Fehler, und wenn n gerade, das Mittel der beiden mittelsten Fehler angenähert gleich R. Man kann 1 gegen 1 wetten, dass R zwischen

$$R\left(1 - \frac{0{,}7867}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } R\left(1 + \frac{0{,}7867}{\sqrt{n}}\right) \text{ liege.}$$

14. Ist u eine Function von $p_1, p_2 \ldots p_n$, so ist, wenn $e_1, e_2 \ldots e_n$ kleine Aenderungen von $p_1, p_2 \ldots p_n$ sind und E die entsprechende Aenderung von u ist:

$$E = \frac{du}{dp_1} e_1 + \frac{du}{dp_2} e_2 \ldots \frac{du}{dp_n} e_n, \text{ oder wenn } \frac{du}{dp_\alpha} = \lambda_\alpha \text{ ist}$$

$$E = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \ldots \lambda_n e_n = \Sigma \lambda e.$$

Sind $e_1, e_2 \ldots e_n$ Fehler an $p_1, p_2 \ldots p_n$, so ist E der entsprechende Fehler an u.

Hieraus $E^2 = \Sigma \lambda^2 e^2 + 2 \Sigma \lambda_\alpha \lambda_\beta e_\alpha e_\beta$ und da e_α und e_β sowohl positiv als negativ sein können, so ist der mittlere Fehler M gegeben durch:

$$M^2 = \Sigma \lambda^2 m^2, \text{ wenn } m_1, m_2 \ldots \text{ die mittlern Werthe von } e_1, e_2 \ldots \text{ sind.}$$

Bezeichnen $R, r_1, r_2, r_3 \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler von u und $e_1, e_2 \ldots$ so ist auch

$$R^2 = \Sigma \lambda^2 r^2.$$

Wenn $r_1 = r_2 = r_3 \ldots$ so ist:

$$R = r \sqrt{\Sigma \lambda^2}.$$

15. Wenn

$$x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots \alpha_n p_n$$
$$y = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \ldots \beta_n p_n$$
$$z = \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 \ldots \gamma_n p_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnen $R_x, R_y, R_z \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler von $x, y, z \ldots$ so ist:

$$R_x = \sqrt{\Sigma \alpha^2 r^2}; \quad R_y = \sqrt{\Sigma \beta^2 r^2}; \quad R_z = \sqrt{\Sigma \gamma^2 r^2} \text{ und wenn}$$
$$r_1 = r_2 = r_3 \ldots$$
$$R_x = r \sqrt{\Sigma \alpha^2}, \quad R_y = r \sqrt{\Sigma \beta^2}; \quad R_z = r \sqrt{\Sigma \gamma^2}.$$

16. Für das arithmetische Mittel ist:

$$x = \frac{\Sigma p}{n}, \text{ also } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \frac{1}{n} \text{ mithin}$$

$$R_x = r \sqrt{\Sigma \frac{1}{n^2}} = r \sqrt{n \frac{1}{n^2}} = \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

17. Für x in No. 11 ist nach No. 6

$$r_1^2 = \frac{\varrho^2}{h^2 g_1}, \quad r_2^2 = \frac{\varrho^2}{h^2 g_2}, \quad r_3^2 = \frac{\varrho^2}{h^2 g_3} \ldots, \text{ also}$$

$$R_x = \sqrt{\Sigma \alpha^2 r^2} = \frac{\varrho}{h} \sqrt{\Sigma \frac{\alpha^2}{g}}.$$

Wegen $x = \frac{\Sigma \alpha g}{\Sigma g}$ ist: $\alpha_1 = \frac{g_1}{\Sigma g}, \quad \alpha_2 = \frac{g_2}{\Sigma g} \ldots$

$$\frac{\alpha_1^2}{g_1} = \frac{g_1}{(\Sigma g)^2}, \quad \frac{\alpha_2^2}{g_2} = \frac{g_2}{(\Sigma g)^2} \ldots \text{ also}$$

$$R_x = \frac{\varrho}{h} \sqrt{\Sigma \frac{g_1}{(\Sigma g)^2}} = \frac{\varrho}{h} \sqrt{\frac{1}{\Sigma g}} = \frac{\varrho}{\sqrt{h^2 \Sigma g}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\Sigma h^2}}.$$

18. Hat Δ die Form $ax + by + cz \ldots - p$ in welchem Ausdruck die m Unbekannten x, y, z zu bestimmen sind, wobei $m < n$ so ist

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - p_1 \\
\Delta_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - p_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_n &= a_n x + b_n y + c_n z \ldots\ldots - p_n
\end{aligned}$$

Die Bedingung, dass $\Sigma\Delta^2$ für die wahrscheinlichsten Werthe von $x, y, z \ldots$ ein Minimum sein muss, giebt

$$\begin{aligned}
x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac \ldots &= \Sigma ap \\
x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc \ldots &= \Sigma bp \\
x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 \ldots &= \Sigma cp \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich für die Unbekannten Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned}
x &= A_1 \Sigma ap + B_1 \Sigma bp + C_1 \Sigma cp \ldots \\
y &= A_2 \Sigma ap + B_2 \Sigma bp + C_2 \Sigma cp \ldots \\
z &= A_3 \Sigma ap + B_3 \Sigma bp + C_3 \Sigma cp \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Haben $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ die frühere Bedeutung, so ist der wahrscheinlichste Werth von ε gegeben durch

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-m}}$$

wodurch auch r bestimmt ist.

Die wahrscheinlichsten Werthe der wahrscheinlichen Fehler von $x, y, z \ldots$ sind

$$R_x = r\sqrt{A_1},\ R_y = r\sqrt{B_2},\ R_z = r\sqrt{C_3} \ldots$$

Die entsprechenden Präcisionen

$$H_x = \frac{\varrho}{R_x},\ H_y = \frac{\varrho}{R_y},\ H_z = \frac{\varrho}{R_z} \ldots$$

Multiplicirt man $\varepsilon, r, R_x, R_y, R_z \ldots, H_x, H_y, H_z \ldots$ mit $\pm\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ so erhält man die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Grössen.

19. Ist $\frac{360^0}{n} = s$ und

$$\begin{aligned}
y_x = a_0 &+ p_1 \sin(v_1 + sx) + p_2 \sin(v_2 + 2sx) \\
&+ p_3 \sin(v_3 + 3sx) + \ldots,
\end{aligned}$$

so kann man aus den n durch Beobachtung gefunden Werthen $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n-1}$ mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate die Konstanten $a_0, p_1, v_1, p_2, v_2 \ldots$ bestimmen.

Setzt man: $p_1 \sin v_1 = a_1$; $p_2 \sin v_2 = a_2$, so sind
$p_1 \cos v_1 = b_1$; $p_2 \cos v_2 = b_2$
die wahrscheinlichsten Werthe dieser Konstanten gegeben durch:

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu; \quad a_1 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \cos \mu z, \quad b_1 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \sin \mu y$$

$$a_2 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \cos 2\mu z, \quad b_2 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \sin 2\mu z$$

$$a_3 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \cos 3\mu z, \quad b_3 = \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu \sin 3\mu z$$

. . . . . .

Es ist $\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \delta_\mu{}^2 = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} y_\mu{}^2 - \frac{n}{2}(2a_0{}^2 + a_1{}^2 + b_1{}^2 + a_2{}^2 + b_2{}^2 + \cdots)$

Man bestimmt so viele Konstanten, dass die Summe der Fehlerquadrate hinreichend klein wird.

Maasse und Gewichte.

Deutsches Maass und Gewicht.

A. Längenmaasse. Einheit: 1 Meter oder Stab = 0,265516 Pr. Ruthen = 3,186199 Pr. Fuss = 38,234399 Pr. Zoll.

0,01 Meter heisst ein Centimeter oder Neuzoll.
0,001 „ „ „ Millimeter „ Strich.
10 „ heissen ein Dekameter oder Kette.
1000 „ „ „ Kilometer.

1 Meile = 7500 Meter = 1991,3745 Pr. Ruthen = 0,995687 Pr. Meilen.

Näherungswerthe: 2 Meter = 3 Pr. Ellen = 76,5 Pr. Zoll.
43 „ = 137 Pr. Fuss.
58 Kilometer = 7,7 Pr. Meilen.

B. Flächenmaasse. Die Einheit: 1 Quadratmeter oder Quadratstab = 10,151867234 Pr. Quadratfuss.

100 Quadratmeter heissen das Ar = 7,0492133 Pr. Quadratruthen.
10000 „ „ „ Hektar = 3,9162296 Pr. Morgen.

Näherungswerthe: 32 Quadratmeter = 335 Pr. Quadratfuss,
20 Ar = 141 Pr. Quadratruthen,
12 Hektar = 47 Pr. Morgen, oder näher,
191 Hektar = 748 Pr. Morgen.

C. Körpermaass. Die Einheit: 0,001 Kubikmeter heisst Liter oder Kanne = 55,89367 Pr. Kubikzoll = 0,873339 Pr. Quart.

Das halbe Liter heisst ein Schoppen.

100 Liter = 1 Hektoliter oder Fass = 3,23459 Pr. Kubikfuss = 1,819455 Pr. Scheffel = 29,11129 Pr. Metzen.

50 Liter sind ein Scheffel = 0,909727 Pr. Scheffel.

Näherungswerthe: 26 Kubikmeter = 841 Kubikfuss.
72 Hektoliter = 131 Pr. Scheffel zu 3072 Kubikzoll.
450 Liter = 131 Pr. Metzen zu 192 Kubikzoll.
71 Liter = 62 Pr. Quart zu 64 Kubikzoll.

D. Gewichte. Die Einheit: 1 Kilogramm = 2 Pr. Pfund.

1 Kilogr. ist das Gewicht eines Liters destillirten Wassers bei + 4° C.

1 Kilogramm = 1000 Gramm.
0,1 Gramm = 1 Decigramm.
0,01 Gramm = 1 Centigramm.
0,001 Gramm = 1 Milligramm.
50 Kilogramm = 100 Pfund heissen ein Centner,
1000 Kilogramm = 2000 Pfund heissen eine Tonne.

1. Fusse, Meter.

Meter	Pariser Fuss	England Russland Fuss	Preussen Dänemark Fuss	Baiern Fuss	Sachsen Fuss	Braunschweig Fuss	Würtemberg Fuss	Baden Schweiz Fuss	Wiener Fuss
1	3,0784	3,2809	3,1862	3,4263	3,5312	3,5043	3,4905	3,3333	3,1634
0,3248	1	1,0658	1,0350	1,1130	1,1471	1,1383	1,1339	1,0828	1,0276
0,3048	0,9383	1	0,9711	1,0443	1,0763	1,0681	1,0639	1,0160	0,9642
0,3139	0,9662	1,0297	1	1,0754	1,1083	1,0998	1,0955	1,0462	0,9929
0,2919	0,8985	0,9576	0,9299	1	1,0306	1,0227	1,0187	0,9729	0,9233
0,2832	0,8718	0,9291	0,9023	0,9703	1	0,9924	0,9885	0,9440	0,9959
0,2854	0,8785	0,9362	0,9092	0,9777	1,0077	1	0,9961	0,9512	0,9027
0,2865	0,8819	0,9399	0,9128	0,9816	1,0117	1,0040	1	0,9550	0,9063
0,3000	0,9235	0,9843	0,9559	1,0279	1,0594	1,0513	1,0472	1	0,9490
0,3161	0,9731	1,0371	1,0072	1,0831	1,1163	1,1078	1,1034	1,0537	1

2. Quadratfusse.

1	9,477	10,764	10,152	11,740	12,469	12,280	12,184	11,111	10,007
0,1055	1	1,1359	1,0712	1,2388	1,3158	1,2958	1,2856	1,1725	1,0560
0,0929	0,8804	1	0,9431	1,0906	1,1584	1,1408	1,1319	1,0322	0,9297
0,0985	0,9335	1,0603	1	1,1564	1,2283	1,2097	1,2001	1,0945	0,9858
0,0852	0,8073	0,9169	0,8648	1	1,0622	1,0461	1,0378	0,9465	0,8524
0,0802	0,7600	0,8633	0,8141	0,9415	1	0,9848	0,9771	0,8911	0,8026
0,0814	0,7717	0,8766	0,8267	0,9560	1,0154	1	0,9921	0,9048	0,8149
0,0821	0,7778	0,8835	0,8332	0,9635	1,0234	1,0079	1	0,9120	0,8214
0,0900	0,8529	0,9688	0,9137	1,0566	1,1222	1,1052	1,0965	1	0,9007
0,0999	0,9470	1,0756	1,0144	1,1731	1,2460	1,2271	1,2175	1,1103	1

8. Cubikfusse.

Meter	Pariser Fuss	England Russland Fuss	Preussen Dänemark Fuss	Baiern Fuss	Sachsen Fuss	Braunschweig Fuss	Würtemberg Fuss	Baden Schweiz Fuss	Wiener Fuss
1	29,174	35,317	32,346	40,223	44,032	43,034	42,528	37,037	31,658
0,0343	1	1,2106	1,1087	1,3788	1,5093	1,4751	1,4577	1,2695	1,0851
0,0283	0,8261	1	0,9159	1,1389	1,2468	1,2185	1,2042	1,0487	0,8964
0,0309	0,9019	1,0918	1	1,2435	1,3613	1,3304	1,3148	1,1450	0,9787
0,0249	0,7253	0,8780	0,8042	1	1,0947	1,0699	1,0573	0,9208	0,7870
0,0227	0,6626	0,8021	0,7346	0,9135	1	0,9773	0,9658	0,8411	0,7190
0,0232	0,6779	0,8207	0,7516	0,9347	1,0232	1	0,9882	0,8606	0,7357
0,0235	0,6860	0,8304	0,7606	0,9458	1,0354	1,0119	1	0,8709	0,7444
0,0270	0,7877	0,9535	0,8733	1,0860	1,1889	1,1619	1,1482	1	0,8548
0,0316	0,9215	1,1156	1,0217	1,2706	1,3909	1,3593	1,3433	1,1699	1

4. Gewichte.

Frankreich		England	Preussen		Dänemark Norwegen	Schweden	Oestreich	Russland
Kilogramm	Altes Pfund	Pfund Adp.	Altes Pfund	Neues Pfund	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund
1	2,0429	2,2046	2,1381	2,0000	2,0028	2,3511	1,7857	2,4419
0,4895	1	1,0792	1,0466	0,9790	0,9804	1,1509	0,8741	1,1953
0,4536	0,9266	1	0,9698	0,9072	0,9085	1,0664	0,8100	1,1076
0,4677	0,9555	1,0311	1	0,9354	0,9367	1,0996	0,8352	1,1421
0,5000	1,0214	1,1023	1,0690	1	1,0014	1,1755	0,8928	1,2201
0,4993	1,0200	1,1008	1,0676	0,9986	1	1,1739	0,8916	1,2193
0,4253	0,8689	0,9377	0,9094	0,8507	0,8519	1	0,7595	1,0386
0,5600	1,1440	1,2346	1,1973	1,1200	1,1216	1,3166	1	1,3675
0,4095	0,8366	0,9028	0,8756	0,8190	0,8202	0,9628	0,7313	1

5. Hülfstafel zur Vergleichung einiger Maasse und Gewichte.

Millimeter	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Preussische Zoll	3,823	7,647	11,470	15,294	19,117	22,941	26,764	30,588	34,411	38,234
Englische Zoll	3,937	7,874	11,811	15,748	19,685	23,623	27,560	31,497	35,434	39,371
Preussische Zoll	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Englische Zoll	1,030	2,059	3,089	4,119	5,149	6,178	7,208	8,238	9,267	10,297
Millimeter	26,154	52,31	78,46	104,62	130,77	156,93	183,08	209,24	235,39	261,54
Englische Zoll	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Millimeter	25,40	50,80	76,20	101,60	127,00	152,40	177,80	203,20	228,60	254,00
Preussische Zoll	0,971	1,942	2,913	3,885	4,856	5,827	6,798	7,769	8,740	9,711
Meter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preussische Fuss	3,186	6,372	9,559	12,745	15,931	19,117	22,303	25,490	28,676	31,862
Englische Fuss	3,281	6,562	9,843	13,124	16,404	19,685	22,966	26,247	29,528	32,809
Preussische Fuss	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Englische Fuss	1,030	2,059	3,089	4,119	5,149	6,178	7,208	8,238	9,267	10,297
Meter	0,314	0,628	0,942	1,255	1,569	1,883	2,197	2,511	2,825	3,139
Englische Fuss	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meter	0,305	0,610	0,914	1,219	1,524	1,829	2,134	2,438	2,743	3,048
Preussische Fuss	0,971	1,942	2,913	3,885	4,856	5,827	6,798	7,769	8,740	9,711
Meter	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Preussische Schritt	132,8	265,5	398,3	531,0	663,8	796,5	929,3	1062,1	1194,8	1327,6
Wiener Klafter	52,72	105,45	158,17	210,90	263,62	316,34	369,07	421,79	474,52	527,24
Preussische Schritt	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Wiener Klafter	39,71	79,43	119,14	158,86	198,57	238,29	278,00	317,72	357,43	397,14
Meter	75,32	150,65	225,97	301,30	376,62	451,95	557,27	602,60	677,92	753,25

Wiener Klafter	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Meter	189,7	379,3	569,0	758,7	948,3	1138,0	1327,7	1517,3	1707,0	1896,7
Preussische Schritt	251,8	503,6	755,4	1007,2	1259,0	1510,8	1762,6	2014,4	2266,2	2518,0
□ Meter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preussische □ Fuss	10,152	20,304	30,456	40,607	50,759	60,911	71,063	81,215	91,367	101,519
Preussische □ Zoll	1462	2924	4386	5847	7309	8771	10233	11695	13157	14619
Preussische □ Fuss	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ Meter	0,0985	0,1970	0,2955	0,3940	0,4925	0,5910	0,6895	0,7880	0,8965	0,9850
Preussische □ Zoll	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ Centimeter	6,840	13,681	20,522	27,362	34,203	41,043	47,884	54,724	61,565	68,403
Cubikmeter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preussische Cubikfuss	32,35	64,69	97,04	129,38	161,73	194,08	226,42	258,77	291,11	323,46
Preussische Cubikfuss	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubikmeter	0,0309	0,0618	0,0927	0,1237	0,1546	0,1855	0,2164	0,2473	0,2782	0,3092
Preussische Cubikzoll	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubik-Centimeter	17,89	35,78	53,67	71,56	89,46	107,35	125,24	143,13	161,02	178,91
Altes Preuss. Pfund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Neues Preuss. Pfund	0,9354	1,8708	2,8063	3,7417	4,6771	5,6125	6,5480	7,4834	8,4188	9,3542
Neues Preuss. Pfund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altes Preuss. Pfund	1,0690	2,1381	3,2071	4,2761	5,3452	6,4142	7,4833	8,5523	9,6213	10,6904
Englisches Pfd. Adp.	1,1023	2,2046	3,3069	4,4092	5,5115	6,6138	7,7161	8,8184	9,9207	11,0230
Englisches Pfund	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Neues Preuss. Pfund	0,9072	1,8144	2,7216	3,6288	4,5360	5,4432	6,3504	7,2576	8,1648	9,0720

6. Vergleichung verschiedener Ruthen,

Preussen	Frankreich		England	Baiern	Sachsen
1 Ruthe=12′	1 Decameter = 10 M.	Alte Toise = 6′	1 Pole = 16½′	1 Ruthe = 10′	1 Ruthe=15⅛′
1	0,3766	1,9324	0,7489	1,2904	0,8769

7. Quadrat-

1	0,14185	3,73402	0,56083	1,66521	0,76892

8. Cubik-

1	0,05342	7,21547	0,42000	2,14884	0,67425

9. Vergleichung von

Preussen	Frankreich	England	Baiern	Sachsen	Braunschweig
Morgen 180 □ R.	Hectare 100 □ Decam.	Acre 160 □ R.	Tagewerk 400 □ R.	Acker 300 □ R.	Feldmorgen 120 □ R.
1	0,25532	0,63092	0,74935	0,46135	1,02064

10. Vergleichung

Preussen Dänemark	Frankreich	England	Sachsen	Braunschweig	Baden
1 Meile = 24000′	Myriameter 10000 Mtr.	Meile 5280′	Meile 32000′	Meile 26000′	Meile 29629,63′
1	0,75325	4,68055	0,83121	1,01524	0,84740

11. Flüssigkeits-

Preussen	Frankreich	England	Baiern	Sachsen	Braunschweig
Quart 64c″	Litre 0,001cm	Gallon 277,274c″	Maasskanne 0,043c′	Dresd. Kanne 47,213c″ par.	Quartier 52¹¹⁄₁₁₀c″ prss.
1	1,14503	0,25202	1,07110	1,22262	1,22222

12. Getreide-

Preussen	Frankreich	England	Baiern	Sachsen	Braunschweig
Scheffel 3072c″	Hectolitre 100 Litres	Bushel 8 Gallons	Scheffel 208 Masskann.	Dresd. Schffl. 7900c″	Himten 2316c″
1	0,54962	1,51211	0,24718	0,52935	1,76471

Klafter mit der preussischen Ruthe.

Braunschweig	Würtemberg	Baden und Schweiz	Oestreich	Russland
1 Ruthe = 16′	1 Ruthe = 10′	1 Ruthe = 10′	1 Klafter = 6′	1 Sashen = 7′
0,8249	1,3146	1,2554	1,9857	1,7652

ruthen etc.

0,68043	1,72821	1,57607	3,94307	3,14606

ruthen etc.

0,56127	2,27193	1,97861	7,82983	5,50059

Feldmaassen.

Würtemberg	Baden Schweiz	Schweden	Oestreich	Russland
Morgen 384 □R.	Morgen, Juchart 400 □ R.	Tonnen Land 56000 □′ 1′=0,2969 Mtr.	Wiener Joch 1600 □ Klftr.	Dessätine 2400 □ Sashen
0,81010	0,70923	0,51722	0,44360	0,23370

von Meilen.

Schweiz	Geograph. Meile	Oestreich	Russland	England und Frankreich Seemeile
Neue Wegstunde 16000′	15 auf 1 Grad	Meile 24000′	Werst 3500′	20 auf 1 Grad
1,56927	1,01514	0,99286	7,06095	1,35352

maasse.

Würtemberg	Baden Schweiz	Schweden	Oestreich	Russland
Helleichmaass 78 1/8c″	Maass 1/18c″	Kanne 0,1c′	Maass 0,0448c′	Stoof 75c″
0,62330	0,76335	0,43750	0,80913	0,93170

maasse.

Hessen	Würtemberg	Baden Schweiz	Oestreich	Russland
Malter 128 Litres	Scheffel 7587c″	Malter 100 Maass	Wiener Mtz. 1,9471c′	Tschetwerik 1600c″
0,42939	0,31012	0,36641	0,89362	2,09634

Münzen.

1. Vergleichs-Währungen.

Preussische oder Thaler-Währung: 30 Thaler = 1 Pfund fein Silber.
Oestreichische Währung: 45 Gulden = 1 „ „ „
Süddeutsche Währung: 52½ Guld. = 1 „ „ „
4 Thaler Preuss. = 6 Gulden Oestr. = 7 Gulden Südd.

2. Münztabelle. (Nach Nelkenbrecher's Taschenbuche.)

Staaten	Thaler-Währung Thl.	Sgr.	Oestr. Währung Gl.	Kr.	Südd. Währung Gl.	Kr.
Deutsches Reich. 1 Zwanzig Markstück	6	20	10		11	40
Preussen und der grösste Theil Nord-Deutschlands. 1 Thlr. = 30 Sgr. à 12 oder 10 Pf.	1	—	1	50	1	45
Oestreich. 1 Gulden = 100 Kreuzer	—	20	1	—	1	10
Süd-Deutschland. 1 Gulden = 60 Kr. à 4 Heller	—	17,1812	—	85,906	1	—
Aegypten. 1 Piaster (Gersh) = 40 Para	—	2,062	—	10,31	—	7,217
Belgien. Siehe Frankreich.						
Bremen. 1 Goldthaler = 72 Groote à 5 Schwaren	1	1,132	1	55,66	1	48,962
Dänemark. 1 Rigsthaler = 6 Mark à 5 Pf.	—	22,7535	1	13,768	1	19,637
England. 1 Pfund Sterling = 20 Schilling à 12 Pence						
68,2844 Pfd. St. = 1 Pfd. fein Gold.						
Wenn 1 Pfd. Gold gleich 460 Thaler,						
dann ist 1 Pfd. St.	6	22,095	10	5,475	11	47,33
1 Schilling Sterling	—	9,4158	—	47,079	—	32,955
Frankreich. 1 Frank = 100 Centimen	—	8,1	—	40,5	—	28,35
Griechenland. 1 Drachme = 100 Lepta	—	7,2527	—	36,264	—	25,384
Hamburg. 1 Mark Courant = 16 Schilling à 12 Pfennige	—	12,3806	—	61,903	—	43,332
Italien. 1 Lira à 100 Centissimi	—	8,1	—	40,5	—	28,35
Lübeck. 1 Mark = 16 Schilling à 12 Pf.	—	12,3806	—	61,903	—	43,332
1 Speciesthaler = 40 Schilling à 12 Pf.	1	16,7711	2	33,855	2	43,699
Mecklenburg. 1 Thlr. = 48 Schill. à 12 Pf.	1	0,067	1	50,336	1	5,235
Niederlande. 1 Gulden = 100 Cents	—	17,01	—	85,05	—	59,535
Nordamerika. 1 Dollar = 100 Cents	1	13,3015	2	16,508	2	31,555
Norwegen. 1 Speciesthaler = 120 Schill.	1	15,507	2	27,535	2	39,275
Polen. 1 Gulden = 15 Kopeken	—	4,8589	—	24,295	—	17,006
Portugal. 1 Caroa = 1000 Reis	1	18,8615	2	44,307	2	51,015
Rom. 1 Scudo = 10 Paoli à 10 Bajocchi	1	13,5748	2	17,874	2	32,512
Russland. 1 Rubel = 100 Kopeken	1	2,393	1	61,965	1	53,376
Schweden. 1 Reichsthaler = 100 Oere	—	11,4753	—	57,376	—	40,163
Schweiz. 1 Frank = 100 Rapp, od. Cent.	—	8,1	—	40,5	—	28,35
Spanien. 1 Duro = 20 Realen	1	12,0627	2	10,313	2	27,219
Südamerika. 1 Piaster = 8 Reales à 10 Decimo.	1	13,713	2	18,565	2	32,995
Türkei. 1 Piaster (Gersh) = 40 Para	—	1,7958	—	8,979	—	6,285

Berichtigungen.

Seite 35 Zeile 5 v. o. Colonne 3. die letzten Stellen 2210 st. 2110

» 59 neben 63 unter 3. 18,9 st. 08,9

» 81 No. 9. $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ st. $a_1^2 + b_1^2 c_1^2$.

» 86 » 10. 2, 4, 6, 8 . . . st. 2, 4, 8 . . . .

» 91 » 22. $\mathfrak{Arc\,Cos}\,\frac{y^2+1}{2y}$ st. $\mathfrak{Arc\,Cos}\,\frac{y^2+1}{2}$.

» 105 » 4. $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ st. $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$.

» 126 Zeile 9 v. u. im letzten Gliede fehlt π.

» 145 » 4 v. o. $\sin^2(r, r_1) =$ st. $=$.

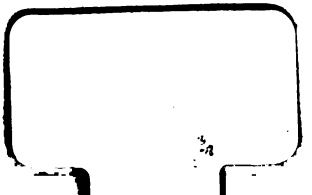
» 180 No. 9. y_0 st. y^0

» 187 » 5. n^3 st. n_3

» 192 » 13. Hinter Radius fehlt b.

» 194 » 15. Kreisevolvente st. Kreisvolvente.

Bemerkung.

In der Integralrechnung sind die Potenzen von sinus, cosinus etc. durch $\sin x^p$, $\cos x^p$ etc. bezeichnet.

NOV17 '86